



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DYNAMICKÉ SYSTÉMY 1

Irena Rachůnková

Jiří Fišer

Olomouc 2014

Předmluva

Tento učební text je určen studentům bakalářského studia matematiky na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky. Jeho cílem je představit studentům tohoto studijního programu základní pojmy a postupy teorie dynamických systémů.

Text vznikl na základě přednášek z předmětu *Dynamické systémy 1*.

Hlavním studijním materiálem z teorie dynamických systémů byly pro studenty až dosud anglicky psané monografie uvedené v seznamu literatury. Z těchto monografií rovněž čerpá tento učební text, který však studijní látku podává co nejjednodušším a přitom přesným způsobem. Omezujeme se zde na skalární a planární dynamické systémy a jejich základní vlastnosti. Hlubší poznatky pak mohou studenti po zvládnutí tohoto textu získat studiem některé ze zmíněných monografií.



Cíle: Na začátku každé kapitoly jsou konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím čtenář získá představu o tom, čemu by měl po nastudování příslušného oddílu rozumět a co by měl být schopen spočítat.

Na konečném tvaru textu se významně podíleli recenzenti *prof. RNDr. Svatoslav Staněk, CSc.* a *doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.* Rádi bychom jim zde za to vyjádřili veliký dík.

V neposlední řadě děkujeme za podporu projektu MATAP - Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého v Olomouci (číslo projektu CZ.1.07/2.2.00/28.0141), který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Listopad 2014

autoři

Obsah

Označení	5
I Základní pojmy	7
1 Dynamické systémy generované soustavou n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu	8
II Skalární dynamické systémy	19
2 Dynamické systémy generované autonomní obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu (skalární DS)	20
3 Elementární bifurkace skalárních dynamických systémů	36
III Planární dynamické systémy	57
4 Soustava dvou lineárních homogenních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty	58
5 Planární lineární dynamické systémy s konstantní maticí J v kanonickém tvaru	72
6 Planární lineární dynamické systémy s obecnou konstantní maticí A	96
7 Planární nelineární dynamické systémy	125
8 Planární Hamiltonovy systémy	150
Literatura	161

Označení

- \mathbb{R} značí množinu všech reálných čísel,
 \mathbb{N} značí množinu všech přirozených čísel.
- Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, pak \mathbb{R}^n značí množinu všech n -tic reálných čísel.
- Uvažujme interval $J \subset \mathbb{R}$. Potom

$$(\mathcal{O}1) \quad \mathbf{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

značí, že vektorová funkce $\mathbf{x}(t)$ zobrazuje interval J do \mathbb{R}^n . Tedy vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$ lze psát ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

kde složky $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jsou skalární funkce proměnné t zobrazující J do \mathbb{R} ,

$$x_i : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Na rozdíl od $(\mathcal{O}1)$, symbol

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

značí, že bod \mathbf{x} má n souřadnic $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, což píšeme ve tvaru

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Normu v \mathbb{R}^n značíme $\|\cdot\|$ a definujeme předpisem

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- Většinou, pokud nebude hrozit nejasnost výpočtu, budeme u bodů z \mathbb{R}^n a vektorových funkcí symbol T vynechávat.
- Uvažujme množinu $G \subset \mathbb{R}^n$. Potom

$$(\mathcal{O}2) \quad \mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

značí, že vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$ zobrazuje množinu G do \mathbb{R}^n . Tedy vektorovou funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ lze psát ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T,$$

kde složky $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ jsou skalární funkce proměnných x_1, \dots, x_n zobrazující G do \mathbb{R} ,

$$f_i : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Dosadíme-li do funkce $f_i(x_1, \dots, x_n)$ za proměnné x_1, \dots, x_n skalární funkce $x_1(t), \dots, x_n(t)$, dostáváme složenou funkci proměnné t

$$f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

zobrazují J do \mathbb{R} . Podobně, dosadíme-li do vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$, dostaneme složenou vektorovou funkci proměnné t

$$(O3) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \left(f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right)^T$$

zobrazující J do \mathbb{R}^n .

- Uvažujme množinu $J \times G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Potom

$$(O4) \quad \varphi : J \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

značí, že vektorová funkce $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ zobrazuje množinu $J \times G$ do \mathbb{R}^n . Tedy vektorovou funkci $\varphi(t, \mathbf{x})$ lze psát ve tvaru

$$(O5) \quad \varphi(t, \mathbf{x}) = \left(\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \right)^T,$$

kde složky $\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n)$ jsou skalární funkce proměnných t, x_1, \dots, x_n zobrazující $J \times G$ do \mathbb{R} ,

$$\varphi_i : J \times G \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Symbol $\mathbf{x} \in C(J)$ značí, že složky $x_1(t), \dots, x_n(t)$ vektorové funkce $\mathbf{x}(t)$ jsou spojité na J . Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Pak $\mathbf{x} \in C^k(J)$ značí, že složky $x_1(t), \dots, x_n(t)$ mají spojité k -té derivace na J .
- Symbol $\mathbf{f} \in C(G)$ resp. $\varphi \in C(J \times G)$ vyjadřuje, že složky vektorové funkce \mathbf{f} resp. φ jsou spojité na G resp. $J \times G$. Analogicky píšeme $\mathbf{f} \in C^k(G)$ resp. $\varphi \in C^k(J \times G)$, pokud odpovídající složky funkce \mathbf{f} resp. φ mají spojité všechny k -té parciální derivace na G resp. $J \times G$.
- Nechť φ je dáno předpisem (O5). Zvolme $t \in J$. Potom $\varphi(t, \cdot)$ označuje zobrazení množiny G do \mathbb{R}^n . Je to tedy vektorová funkce proměnných $x_1, \dots, x_n \in G$.

Část I

Základní pojmy

1 Dynamické systémy generované soustavou n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu



Cílem této kapitoly je vysvětlit:

- co je dynamický systém a jak vzniká z diferenciálních rovnic,
- co je kritický bod a jeho stabilita,
- co je fázový portrét.

Budeme se zde zabývat matematickým popisem dlouhodobého časového vývoje izolovaných systémů. Systémy se budou měnit v čase v důsledku svých vnitřních zákonitostí a mechanismů.

Materiální podstata systémů může být biologická (vývoj populací), fyzikální (pohyby kyvadel, oscilátory), ekonomická (vývoj cen), epidemiologická (šíření infekce), atd.

Matematický model takového systému, který se mění v čase nazýváme dynamickým systémem. Vývoj dynamického systému můžeme sledovat nepřetržitě, nebo v oddělených časových okamžicích. Při nepřetržitém sledování hovoříme o spojitým dynamickém systému, zatímco ve druhém případě užíváme termín diskrétní dynamický systém.

V tomto textu se budeme zabývat pouze spojitými dynamickými systémy.

Sledujeme-li časový vývoj pouze jedné veličiny, dostáváme skalární dynamické systémy (v \mathbb{R}), kterým jsou věnovány kapitoly 2 a 3.

Uveďme dva příklady modelů, v nichž vystupuje pouze jedna sledovaná funkce $x(t)$. Modely mají tvar diferenciální rovnice prvního řádu a vyjadřují vztah mezi funkční hodnotou $x(t)$ a její změnou (růstem, klesáním) v čase t . Tato změna je vyjádřena derivací $x'(t)$.

Příklad 1.1 Rovnice radioaktivního rozpadu má tvar

$$x'(t) = -ax(t), \quad (1.1)$$

kde $a > 0$ je konstanta specifikující radioaktivní prvek a $x(t)$ značí množství nerozložených radioaktivních atomů v čase t .

Příklad 1.2 Logistická rovnice

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t)) \quad (1.2)$$

je modelem růstu populace $x(t)$, kde parametr $r > 0$ vyjadřuje rozdíl mezi koeficientem míry plodnosti a koeficientem míry úmrtnosti populace.

Sledujeme-li současně časový vývoj dvou veličin, dostáváme planární dynamické systémy (v \mathbb{R}^2), kterým jsou věnovány kapitoly 4 – 8.

Uveďme příklady modelů, v nichž vystupují dvě sledované funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Modely mají tvar soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu.

Příklad 1.3 Model matematického kyvadla s tlumením má tvar soustavy

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - 2ax_2(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

kde funkce $x_1(t)$ vyjadřuje velikost úhlové odchylky kyvadla v čase t od svislé pozice kyvadla a funkce $x_2(t)$ udává úhlovou rychlost kyvadla v čase t . V soustavě vystupují 3 kladné konstanty g, l, a , přičemž g je tíhové zrychlení, l je délka tyče kyvadla, a je koeficient tlumení (tření) kyvadla.

Příklad 1.4 Populační model typu kořist–dravec s vnitrodruhovou konkurencí má tvar soustavy

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1x_1(t) - a_2x_1(t)x_2(t) - b_1x_1^2(t), \\ x_2'(t) = -a_3x_2(t) + a_4x_1(t)x_2(t) - b_2x_2^2(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

kde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ jsou kladné parametry. Funkce $x_1(t)$ vyjadřuje velikost populace kořisti v čase t , funkce $x_2(t)$ vyjadřuje velikost populace dravců v čase t .

a_1 je koeficient míry plodnosti kořisti,

a_3 je koeficient míry úmrtnosti dravců,

a_2 vyjadřuje vliv dravců na úbytek kořisti,

a_4 vyjadřuje vliv kořisti na růst populace dravců,

b_1 je koeficient vnitrodruhové konkurence v populaci kořisti,

b_2 je koeficient vnitrodruhové konkurence v populaci dravců.

Uvažujeme-li nyní přirozené číslo n a sledujeme-li současně časový vývoj n veličin, dostáváme n -rozměrný dynamický systém (v \mathbb{R}^n). Uveďme příklad modelu, v němž vystupují tři sledované funkce $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$. Model má tvar soustavy tří diferenciálních rovnic prvního řádu.

Příklad 1.5 Lorenzův model popisuje chování tekutiny pohybující se v dvou-rozměrné vrstvě a zahříváné zdola. Model má tvar soustavy

$$\begin{cases} x_1'(t) = \sigma(x_2(t) - x_1(t)), \\ x_2'(t) = rx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t), \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t), \end{cases}$$

kteřá obsahuje tři sledované funkce $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$, reprezentující rychlost tekutiny a perturbaci teploty. Dále v soustavě vystupují tři parametry σ, r, b charakterizující typ tekutiny, její zahřívání a pohyb.

Nyní uvedeme základní pojmy užívané v teorii dynamických systémů. Tyto pojmy lze definovat prakticky stejným způsobem pro systémy skalární, planární, nebo n -rozměrné. Z toho důvodu jsou zde definovány v prostoru \mathbb{R}^n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.6 Nechť G je otevřená podmnožina prostoru \mathbb{R}^n a vektorová funkce $\varphi(t, \mathbf{x})$ zobrazuje množinu $\mathbb{R} \times G$ do G . Dále nechť $\varphi \in C(\mathbb{R} \times G)$ a má následující vlastnosti:

- (i) $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$ pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$;
- (ii) $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0))$ pro každé $t, s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in G$;
- (iii) pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje k zobrazení $\varphi(t, \cdot)$ inverzní zobrazení a je rovno $\varphi(-t, \cdot)$.

Potom zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ nazveme *tok*.

Pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ nazveme zobrazení

$$\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$$

dynamický systém v \mathbb{R}^n . Prostor \mathbb{R}^n nazveme *fázový prostor*.

Uvažujme soustavu n autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (1.5)$$

Zde f_1, \dots, f_n jsou funkce n reálných proměnných. Tuto soustavu lze ekvivalentním způsobem zapsat ve tvaru vektorové rovnice (viz (O1) a (O2))

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (1.6)$$

Ukážeme, jakým způsobem lze k rovnici (1.6) určit dynamický systém v \mathbb{R}^n . Nejprve připomeňme některé pojmy a vztahy z teorie diferenciálních rovnic.

Definice 1.7 *Řešením rovnice (1.6) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ takovou, že $\mathbf{x} \in C^1(J)$ splňuje rovnici (1.6) pro každé $t \in J$.*

Dále budeme předpokládat, že $0 \in J$.

Rovnice (1.6) má obvykle nekonečně mnoho řešení. Proto klademe na řešení další podmínky, které upřesní, jaké řešení máme zrovna na mysli. Základní podmínka, kterou můžeme specifikovat jednotlivá řešení rovnice (1.6) je *počáteční podmínka* (Cauchyova) tvaru

$$x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0, \quad (1.7)$$

kde bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ je tzv. *počáteční bod řešení*. Podmínku (1.7) lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (1.8)$$

Definice 1.8 Úloha (1.6), (1.8) se nazývá *počáteční (Cauchyova) úloha*.

Jedná se o úlohu najít řešení rovnice (1.6) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ splňující podmínku (1.8). Takové řešení budeme značit $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$. Podle definice 1.7 a vzorce (1.8) vektorová funkce φ splňuje následující rovnosti

$$\varphi'(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) \quad \text{pro každé } t \in J, \quad (1.9)$$

$$\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0. \quad (1.10)$$

Poznámka 1.9 Funkce \mathbf{f} z rovnice (1.6) závisí na n proměnných x_1, \dots, x_n (viz (O2)), za něž v rovnici (1.6) dosazujeme skalární funkce $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (viz (O3)). Takovou rovnici nazýváme *autonomní*.

Obecnější typ rovnice dostáváme, pokud je \mathbf{f} funkcí $n + 1$ proměnných

$$t, x_1, \dots, x_n$$

a rovnice má pak tvar

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (1.11)$$

Rovnici (1.11) nazýváme *neautonomní* a vyšetřujeme ji s obecnější počáteční podmínkou tvaru

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (1.12)$$

kde t_0 je zvolené reálné číslo v intervalu J .

V případě autonomní rovnice (1.6) stačí uvažovat místo počáteční podmínky (1.12) její speciální tvar (1.8), kde $t_0 = 0$. Přímým výpočtem zjistíme, že je-li $\psi(t, \mathbf{x}^0)$ řešení rovnice (1.6) splňující podmínku (1.12), pak

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \psi(t + t_0, \mathbf{x}^0)$$

je také řešením rovnice (1.6) a přitom splňuje podmínku (1.8). Platí totiž

$$\frac{d\varphi(t, \mathbf{x}^0)}{dt} = \frac{d\psi(t + t_0, \mathbf{x}^0)}{dt} = \mathbf{f}(\psi(t + t_0, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)).$$

Věta 1.10 (Základní věta o existenci a jednoznačnosti) *Nechť G je otevřená podmnožina v \mathbb{R}^n obsahující bod \mathbf{x}^0 . Dále nechť $\mathbf{f} \in C^1(G)$.*

Potom úloha (1.6), (1.8) má jediné řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ definované na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0}) \subset \mathbb{R}$ obsahujícím 0.

Důkaz. Například [6], str. 73. □

Poznámka 1.11 V dalším budeme stále předpokládat, že funkce \mathbf{f} v rovnici (1.6) splňuje podmínky věty 1.10, tj. $\mathbf{f} \in C^1(G)$. Tím budeme mít zaručenu existenci jediné vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$, která bude splňovat (1.9) a (1.10) pro $\mathbf{x}^0 \in G$ a $J = I_{\mathbf{x}^0}$.

Pro pevně zvolené $\mathbf{x}^0 \in G$ je vektorová funkce $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$ zobrazením z J do \mathbb{R}^n a lze ji psát ve tvaru (srovnej s (O5))

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (\varphi_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, \varphi_n(t, x_1^0, \dots, x_n^0)).$$

Pro větší stručnost a přehlednost budeme často složky $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ zobrazení φ značit x_1, \dots, x_n a budeme jednoduše psát

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.13)$$

Poznámka 1.12 Pro vyšetřování řešení rovnice (1.6) existují tři základní typy metod.

1. *Elementární metody řešení*, které spočívají v nalezení explicitního tvaru řešení úlohy (1.6), (1.8). Lze je použít pouze u některých jednoduchých typů rovnic.
2. *Numerické metody řešení* úlohy (1.6), (1.8). Při užití těchto metod nemáme bez předchozího analytického rozboru a kvalitativního studia rovnice a bez důkazu konvergence metody zaručenu správnost výpočtu. Dostáváme pouze přibližné hodnoty řešení. Výhodou je možnost užití počítačů.
3. *Kvalitativní studium rovnice* (1.6). V tomto případě nehledáme řešení ani analyticky pomocí nějaké elementární metody řešení ani numericky, ale z vlastností funkce \mathbf{f} vystupující v rovnici (1.6) odvozujeme vlastnosti řešení pro různé počáteční podmínky (1.8). Jedna z možností pro kvalitativní studium rovnice (1.6) je užití teorie dynamických systémů, která umožňuje popsat lokální a globální chování množiny všech řešení rovnice (1.6). Tento popis lze získat prostřednictvím fázového portréту rovnice (1.6). Určování fázových portrétů a jejich interpretaci se budeme věnovat v následujícím textu. Nyní ukážeme, jak rovnice (1.6) generuje dynamický systém.

Věta 1.13 (Generování dynamického systému) *Nechť \mathbf{x}^0 je libovolný bod z otevřené množiny G v \mathbb{R}^n , $\mathbf{f} \in C^1(G)$ a nechť $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je řešením úlohy (1.6), (1.8) na \mathbb{R} . Předpokládejme, že $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jako vektorová funkce $n + 1$ proměnných t, x_1^0, \dots, x_n^0 zobrazuje množinu $\mathbb{R} \times G$ do G .*

Potom φ je tok. Dále pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ dynamický systém v \mathbb{R}^n .

Důkaz. Ověříme, že φ splňuje podmínky (i), (ii) a (iii) z definice 1.6.

- Jelikož $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je řešením úlohy (1.6), (1.8), tak platí (1.9) a (1.10) a tedy také (i) z definice 1.6.
- Zvolme pevné $s \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x}^0 \in G$. Dále položíme

$$\psi(t) = \varphi(t + s, \mathbf{x}^0) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}^1 = \varphi(s, \mathbf{x}^0).$$

Pak pro $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t + s, \mathbf{x}^0)}{dt} = \mathbf{f}(\varphi(t + s, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{f}(\psi(t)).$$

Proto $\psi(t)$ je řešením rovnice (1.6) na \mathbb{R} . Navíc $\psi(0) = \varphi(s, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^1$.

Uvažujme nyní počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^1. \tag{1.14}$$

Podle věty 1.10 má úloha (1.6), (1.14) jediné řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^1)$ na $I_{\mathbf{x}^1}$, přičemž z předpokladů věty máme $I_{\mathbf{x}^1} = \mathbb{R}$, a proto platí, že $\psi(t) = \varphi(t, \mathbf{x}^1)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Odtud plyne

$$\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \psi(t) = \varphi(t, \mathbf{x}^1) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0)), \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy platí podmínka (ii) z definice 1.6.

- Zvolme pevné $t \in \mathbb{R}$ a uvažujme zobrazení $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$, které každému $\mathbf{x}^0 \in G$ přiřazuje jediné $\mathbf{y}^0 \in G$, přičemž $\mathbf{y}^0 = \varphi(t, \mathbf{x}^0)$. Jednoznačnost \mathbf{y}^0 plyne z věty 1.10. Naopak pro každé $\mathbf{y}^0 \in G$ existuje jediné $\mathbf{x}^0 \in G$ splňující $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$. Existuje proto inverzní zobrazení k zobrazení $\varphi(t, \cdot)$. Odvodíme jeho tvar. Vzhledem k (i) a (ii) platí

$$\varphi(-t, \mathbf{y}^0) = \varphi(-t, \varphi(t, \mathbf{x}^0)) = \varphi(-t + t, \mathbf{x}^0) = \varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0.$$

Tedy toto inverzní zobrazení má tvar $\varphi(-t, \cdot) : G \rightarrow G$. Dokázali jsme, že platí (iii) z definice 1.6.

□

Poznámka 1.14 Větou 1.10 máme zaručeno, že řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (1.6), (1.8) je definováno na intervalu $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0})$, který je obecně pouze podintervalem v \mathbb{R} . Tedy $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ nemusí být definováno pro každé $t \in \mathbb{R}$. Takové zobrazení nesplňuje podmínky věty 1.13 o generování dynamického systému. Je-li ale $G = \mathbb{R}^n$, a tedy funkce $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$, pak lze provést transformaci proměnné t tak, že po této transformaci, platí $I_{\mathbf{x}^0} = \mathbb{R}$ pro každé $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Transformovaná rovnice potom generuje dynamický systém ve smyslu věty 1.13. Nicméně i v případě, že $\mathbf{f} \in C^1(G)$ a G je vlastní podmnožina \mathbb{R}^n , lze transformovat rovnici (1.6) tak, že transformovaná rovnice generuje dynamický systém. Podrobnosti o těchto transformacích lze nalézt např. v knize [6], str. 166–170.

Vzhledem k poznámce 1.14 můžeme k vyšetřování rovnice (1.6) užívat metody teorie dynamických systémů, pokud jsou splněny předpoklady věty 1.10 a pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$ existuje řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (1.6), (1.8) definované na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0}) \subset \mathbb{R}$.

Uveďme základní pojmy potřebné k definici fázového portréту diferenciální rovnice (1.6).

Definice 1.15 Graf řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je množina bodů $(t, \varphi(t, \mathbf{x}^0))$, kde $t \in I_{\mathbf{x}^0}$.

Podle značení (1.13) lze body grafu zapisovat ve tvaru

$$(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{kde } t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Pro pevně zvolené t pak dostáváme bod z prostoru \mathbb{R}^{n+1} . Podle definice 1.7 je $\varphi \in C^1(I_{\mathbf{x}^0})$, a proto uvedené body vytvářejí hladkou křivku.

Tedy platí, že graf řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je hladká křivka v prostoru \mathbb{R}^{n+1} s parametrickými rovnicemi

$$t = t, \quad x_1 = x_1(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

- Proměnnou t z intervalu $I_{\mathbf{x}^0}$ často nazýváme *časovou proměnnou*.

Definice 1.16 Orbita řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je množina bodů $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$, kde $t \in I_{\mathbf{x}^0}$.

Podle značení (1.13) lze body orbity zapisovat ve tvaru

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{kde } t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Pro pevně zvolené t pak dostáváme bod z prostoru \mathbb{R}^n . Tedy platí, že orbita řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je hladká křivka v prostoru \mathbb{R}^n s parametrickými rovnicemi

$$x_1 = x_1(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Vidíme, že orbitu řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ dostaneme jako projekci grafu řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ do prostoru \mathbb{R}^n . Takovou orbitu značíme $\gamma(\mathbf{x}^0)$.

Definice 1.17 *Kladná část orbity* řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je množina bodů $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$, kde $t \in [0, b_{\mathbf{x}^0})$. Značíme ji $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$.

Záporná část orbity řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je množina bodů $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$, kde $t \in (a_{\mathbf{x}^0}, 0]$. Značíme ji $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$.

Definice 1.18 *Kritický bod* rovnice (1.6) je bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Pokud bod $\bar{\mathbf{x}}$ není kritický bod, nazýváme ho *regulární bod* rovnice (1.6).

Poznámka 1.19 Termín kritický bod je kromě toho užíván ještě v následujících významech:

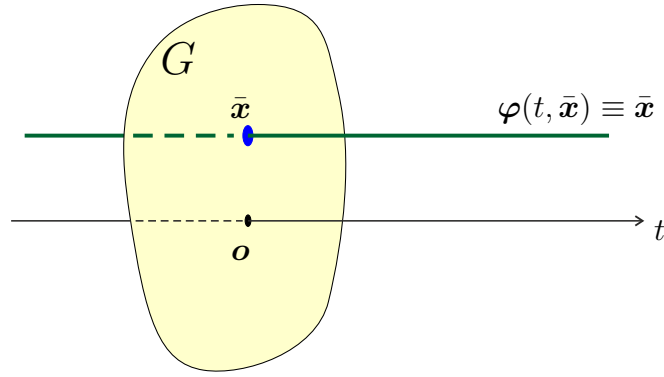
- konstantní řešení $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$ rovnice (1.6);
- graf konstantního řešení $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}})$, což je rovnoběžka s osou t ;
- orbita $\gamma(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$, která se skládá z jediného bodu $\bar{\mathbf{x}}$.

Důvodem je skutečnost, že pokud zvolíme počáteční bod \mathbf{x}^0 v (1.8) rovný kritickému bodu $\bar{\mathbf{x}}$, pak konstantní funkce $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$ má nulovou derivaci, tj. $\varphi'(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$. Z (1.15) dostáváme $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, a proto konstantní funkce $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}})$ je řešením rovnice (1.6) na \mathbb{R} . Projekcí grafu funkce $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}})$ do množiny G dostáváme jednobodovou orbitu $\gamma(\bar{\mathbf{x}})$ (viz obrázek 1).

V aplikacích často užíváme místo termínu kritický bod termín *ekvilibrrium* nebo *bod rovnováhy*.

Definice 1.20 *Fázový portrét rovnice* (1.6) je množina orbit všech řešení rovnice společně se šipkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ na orbitě pro rostoucí t . Prostor \mathbb{R}^n obsahující fázový portrét rovnice (1.6) nazveme *fázový prostor*.

Důležitou vlastností kritického bodu je *stabilita*, kterou definujeme následovně. Předpokládejme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je množina z věty 1.10 a $I_{\mathbf{x}^0} = \mathbb{R}$ pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$.



Obrázek 1: Konstantní řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a jeho průmět $\bar{\mathbf{x}}$ jako jednobodová orbita $\gamma(\bar{\mathbf{x}})$.

Definice 1.21 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (1.6) nazveme *stabilní*, jestliže platí

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon \\ \text{pro každé } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Definice 1.22 Zvolme bod $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Potom množinu bodů $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ splňujících nerovnost

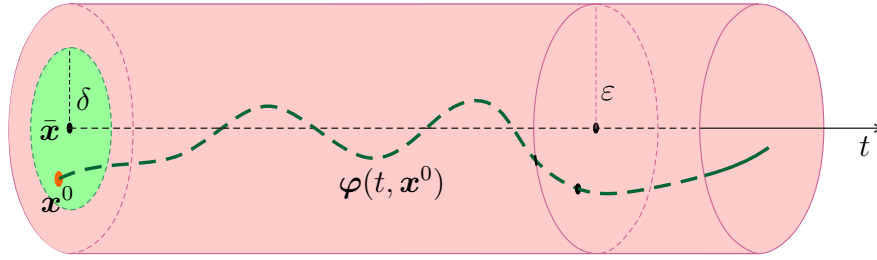
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < \varepsilon$$

nazveme ε -ové okolí bodu \mathbf{a} .

Podmínka (1.16) značí, že pro každé kladné ε lze najít takové kladné δ , že pokud volíme počáteční bod $\mathbf{x}^0 \in G$ v δ -ovém okolí kritického bodu $\bar{\mathbf{x}}$, pak pro každé pevné $t \geq 0$ leží bod $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ v ε -ovém okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$.

Pro $n = 2$ je grafem řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ křivka v prostoru \mathbb{R}^3 a podmínku (1.16) lze zobrazit jako na obrázku 2.

K libovolnému kladnému ε lze najít takové kladné δ , že volíme-li počáteční bod \mathbf{x}^0 v (zeleném) kruhu o poloměru δ , jehož středem je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$, leží celý graf řešení (tmavě zelený) pro $t \geq 0$ ve válci o poloměru ε , jehož osou je graf konstantního řešení $\bar{\mathbf{x}}$ (viz poznámku 1.19.)



Obrázek 2: Stabilní kritický bod \bar{x} .

Definice 1.23 Kritický bod $\bar{x} \in G$ rovnice (1.6) nazveme *nestabilní*, pokud není stabilní. To znamená, že platí

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{x} - \mathbf{x}^0\| < \delta \wedge \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{x}\| \geq \varepsilon \\ \text{aspoň pro jedno } t > 0. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Podmínka (1.17) značí, že existuje takové kladné ε , že pro každé kladné δ lze najít počáteční bod \mathbf{x}^0 v δ -ovém okolí kritického bodu \bar{x} a současně hodnotu $t_1 > 0$ takovou, že bod $\varphi(t_1, \mathbf{x}^0)$ neleží v ε -ovém okolí bodu \bar{x} .

Pro $n = 2$ podmínka (1.17) znamená, že existuje válec o poloměru ε (jehož osou je graf konstantního řešení \bar{x}) takový, že zvolíme-li kruh o středu \bar{x} s libovolně malým poloměrem δ , vždy lze v tomto kruhu najít počáteční bod \mathbf{x}^0 takový, že graf řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ opustí válec pro nějaké $t_1 > 0$.

V aplikacích má největší význam silnější typ stability ilustrovaný pro $n = 2$ na obrázku 3 a definovaný takto.

Definice 1.24 Kritický bod $\bar{x} \in G$ rovnice (1.6) nazveme *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc platí

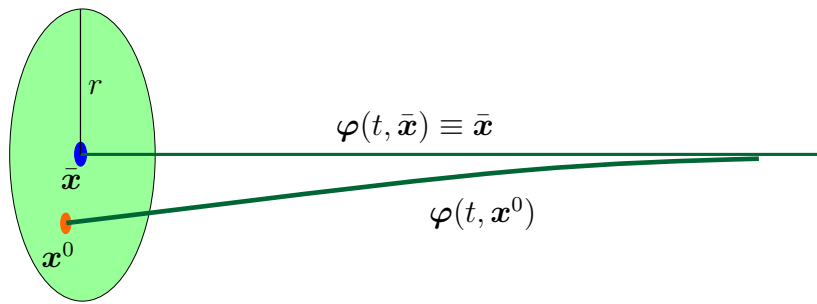
$$\exists r > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{x} - \mathbf{x}^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{x}\| = 0. \quad (1.18)$$

Definice 1.25 Množina počátečních bodů $\mathbf{x}^0 \in G$ splňujících podmínku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{x}\| = 0$$

(viz (1.18)) se nazývá *oblast přitažlivosti* kritického bodu \bar{x} .

Oblast přitažlivosti může mít velmi složitou strukturu a její určení bývá obtížný problém.



Obrázek 3: Asymptoticky stabilní kritický bod \bar{x} .

Definice 1.25 říká, že volíme-li počáteční bod x^0 v oblasti přitažlivosti kritického bodu \bar{x} , potom graf řešení $\varphi(t, x^0)$ konverguje pro $t \rightarrow \infty$ ke grafu konstantního řešení \bar{x} .

Část II

Skalární dynamické systémy

2 Dynamické systémy generované autonomní obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu (skalární DS)



Cílem této kapitoly je naučit se:

- určovat fázové portréty skalárních diferenciálních rovnic prvního řádu a hyperbolické i nehyperbolické kritické body,
- určovat stabilitu kritických bodů těchto rovnic,
- vyšetřovat závislost fázového portréту na parametrech.

Položíme-li v definicích a větách kapitoly 1 dimenzi $n = 1$, dostáváme dynamické systémy v \mathbb{R} , které nazýváme *skalární dynamické systémy*. Podle věty 1.13 tyto skalární dynamické systémy vznikají ze skalárních autonomních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

Rovnice (1.6) má totiž pro $n = 1$ tvar

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

kde $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ je skalární funkce jedné proměnné x , $f \in C^1(G)$ a $G \subset \mathbb{R}$. V souladu s definicí 1.7 pak řešením rovnice (2.1) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme skalární funkci $x(t)$ takovou, že $x \in C^1(J)$ splňuje rovnici (2.1) pro každé $t \in J$. Opět budeme předpokládat, že interval J obsahuje 0. Počáteční podmínka (1.8) má nyní tvar

$$x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

kde $x_0 \in G$. Řešení počáteční úlohy (2.1), (2.2) na intervalu J budeme značit $\varphi(t, x_0)$. Je to skalární funkce splňující

$$\varphi'(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0)) \quad \text{pro každé } t \in J, \quad (2.3)$$

$$\varphi(0, x_0) = x_0. \quad (2.4)$$

Vzhledem k definici 1.18 je $\bar{x} \in G$ kritický bod rovnice (2.1), jestliže $f(\bar{x}) = 0$.

Příklad 2.1 Zvolme funkci $f(x) = x^2$ a uvažujme rovnici (2.1) s touto funkcí f . Pak má (2.1) tvar

$$x'(t) = x^2(t). \quad (2.5)$$

Platí $f \in C^1(\mathbb{R})$, a proto podle věty 1.10, v níž je $n = 1$ a $G = \mathbb{R}$, má úloha (2.5), (2.2) pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ jediné řešení $\varphi(t, x_0)$ definované na maximálním intervalu $I_{x_0} = (a_{x_0}, b_{x_0}) \subset \mathbb{R}$.

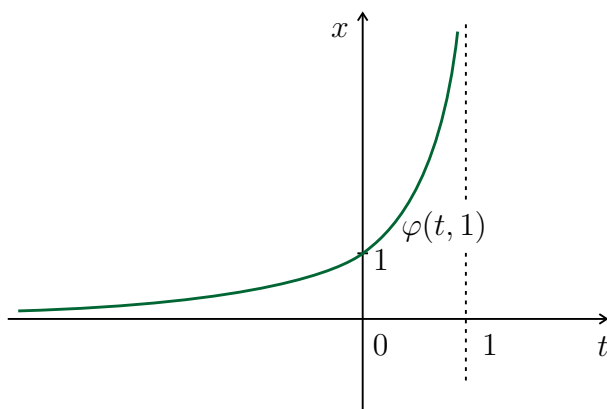
V tomto případě lze užít k nalezení řešení úlohy (2.5), (2.2) elementární metodu separace proměnných, pomocí níž dostáváme funkci

$$\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad t \in I_{x_0}. \quad (2.6)$$

Vidíme, že $\varphi(0, x_0) = x_0$ a přímým dosazením do (2.5) lze ověřit, že $\varphi(t, x_0)$ splňuje tuto rovnici na intervalu I_{x_0} , kde I_{x_0} závisí na volbě počáteční hodnoty x_0 . Pro $x_0 > 0$ je $I_{x_0} = (-\infty, \frac{1}{x_0})$, pro $x_0 = 0$ je $I_{x_0} = (-\infty, \infty)$ a pro $x_0 < 0$ je $I_{x_0} = (\frac{1}{x_0}, \infty)$.

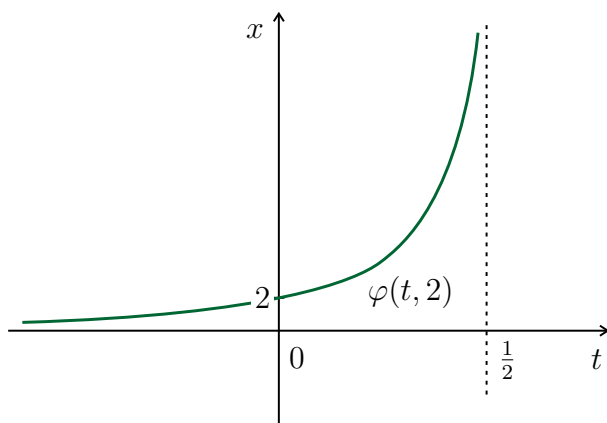
Nyní ilustrujeme pojmy zavedené v definicích 1.15–1.20 na příkladu rovnice (2.5) a jejího řešení (2.6). Nejprve ukažme několik grafů řešení $\varphi(t, x_0)$ pro různé volby počáteční hodnoty x_0 .

- Pro $x_0 = 1$ je $\varphi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$ a $I_1 = (-\infty, 1)$ (viz obrázek 4).



Obrázek 4: Graf řešení $\varphi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$, $I_1 = (-\infty, 1)$.

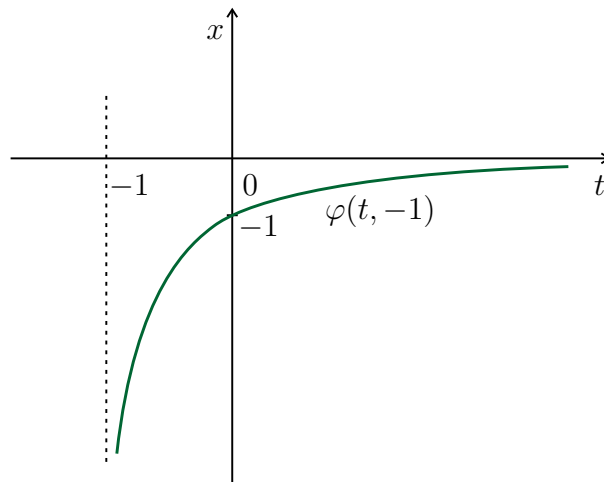
- Pro $x_0 = 2$ je $\varphi(t, 2) = \frac{1}{\frac{1}{2}-t}$, $I_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$ (viz obrázek 5).



Obrázek 5: Graf řešení $\varphi(t, 2) = \frac{1}{\frac{1}{2}-t}$, $I_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$.

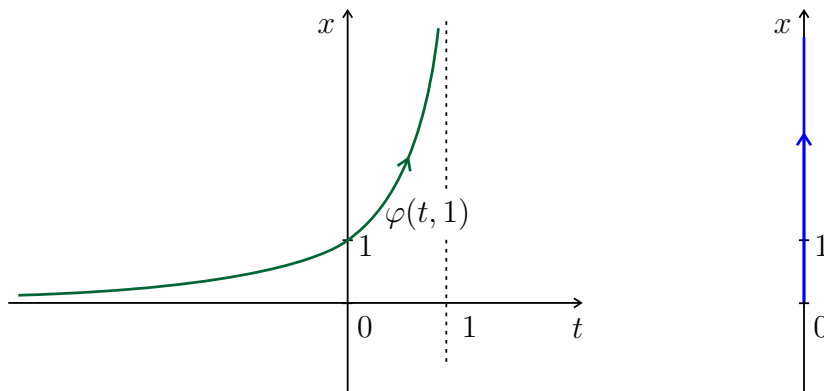
- Pro $x_0 = -1$ je $\varphi(t, -1) = \frac{-1}{1+t}$, $I_{-1} = (-1, \infty)$ (viz obrázek 6).

Nyní určíme odpovídající orbity.



Obrázek 6: Graf řešení $\varphi(t, -1) = \frac{-1}{1+t}$, $I_{-1} = (-1, \infty)$.

- $\gamma(1)$ je orbita řešení $\varphi(t, 1)$ a dostaneme ji projekcí grafu funkce $\varphi(t, 1)$ do osy x . Šipka na orbitě určuje pohyb po grafu pro rostoucí t a z něho odvozený pohyb na orbitě pro rostoucí t (viz obrázek 7).



Obrázek 7: Graf řešení $\varphi(t, 1) = \frac{1}{1-t}$, $I_1 = (-\infty, 1)$ (vlevo) a příslušná orbita (vpravo).

Vidíme, že $\gamma(1) = (0, \infty)$, $\gamma_+(1) = [1, \infty)$, $\gamma_-(1) = (0, 1]$.

Podobně $\gamma(2) = (0, \infty)$, $\gamma_+(2) = [2, \infty)$, $\gamma_-(2) = (0, 2]$, $\gamma(-1) = (-\infty, 0)$, $\gamma_+(-1) = [-1, 0)$, $\gamma_-(-1) = (-\infty, -1]$.

Kritický bod rovnice (2.5) je nulový bod funkce $f(x) = x^2$. Tedy $\bar{x} = 0$. Je to konstantní řešení rovnice (2.5), jeho grafem je osa t a jeho orbita je jednobodová.

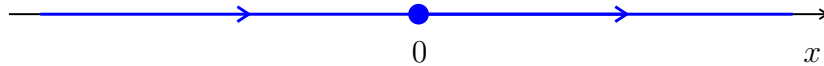
Zjistili jsme, že rovnice (2.5) má pouze tři orbity:

$\gamma(x_0) = (0, \infty)$ pro $x_0 > 0$, tedy $\gamma(x_0)$ je otevřený interval,

$\gamma(0) = \{0\}$, tedy $\gamma(0)$ je jednobodová množina,

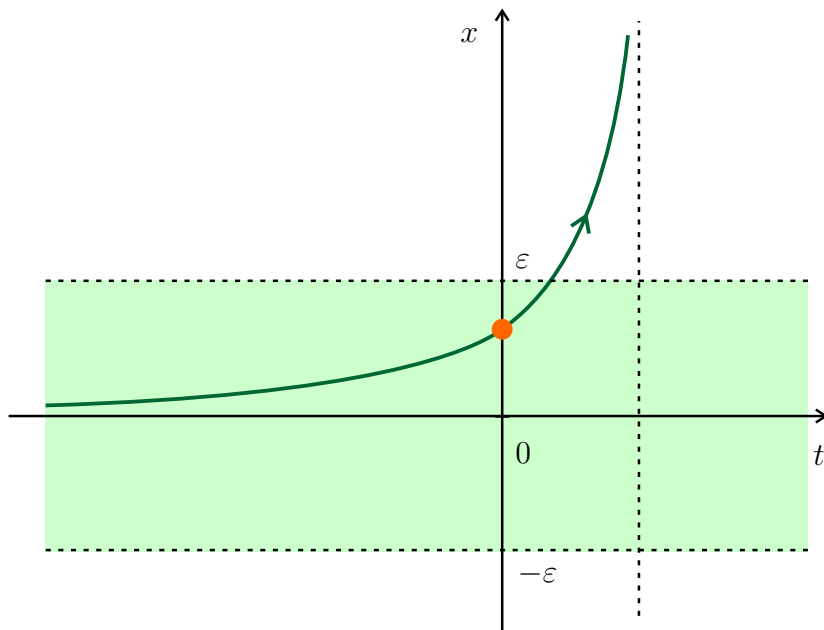
$\gamma(x_0) = (-\infty, 0)$ pro $x_0 < 0$, tedy $\gamma(x_0)$ je otevřený interval.

Při konstrukci fázového portréту přetáčíme osu x do vodorovné polohy. Fázový portrét rovnice (2.5) je načrtnut na obrázku 8. Fázový prostor je zde jedno-rozměrný a je jím osa x .



Obrázek 8: Fázový portrét rovnice (2.5).

Kritický bod 0 je nestabilní, protože graf každého řešení s kladnou počáteční hodnotou opustí libovolný ε -ový pás ohraničených dvěma rovnoběžkami s osou t ve vzdálenosti ε od osy t (viz obrázek 9).



Obrázek 9: Kritický bod 0 (rovnice (2.5)) je nestabilní.

V tomto příkladě jsme fázový portrét, kritické body a jejich stabilitu určovali ze znalosti řešení rovnice (2.5).

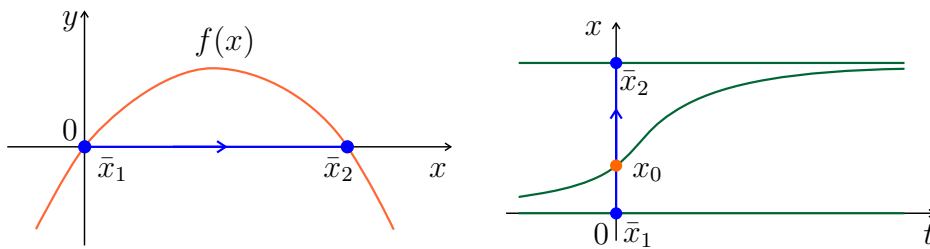
V praxi takto nepostupujeme, ale určujeme fázový portrét i stabilitu kritických bodů přímo z funkce f bez znalostí řešení dané rovnice (2.1). Naopak, ze znalosti fázového portrétu pak usuzujeme, jaké možné typy chování mají případná (neznámá) řešení rovnice (2.1).

- *Metoda určení fázového portrétu rovnice (2.1) přímo z funkce f .*

1. Určíme nulové body funkce f . Tím získáme kritické body rovnice (2.1).
2. Určíme intervaly mezi kritickými body resp. neomezený interval, jehož jeden koncový bod je kritický bod, na nichž je funkce f kladná. Tím získáme orbity s šípkami směřujícími doprava.
3. Na zbývajících intervalech je f záporná a tyto intervaly jsou orbity s šípkami směřujícími doleva.

Ze získaných orbit se skládá fázový portrét.

- Tento postup je založen na následující úvaze.
 - Z věty 1.10 plyne, že žádné dva grafy odpovídajících různých řešení rovnice (2.1) se nemohou protínat ani dotýkat.
 - Kritické body jsou konstantní řešení rovnice (2.1) a jejich grafy jsou rovnoběžky s osou t , které rozdělují rovinu bodů (t, x) na pásy, v nichž leží grafy ostatních řešení rovnice (2.1). Přitom, volíme-li počáteční hodnotu x_0 v jednom z pásů, leží celý graf řešení $\varphi(t, x_0)$ v tomto pásu.
 - Je-li funkce $f(\varphi(t, x_0))$ kladná, potom řešení $\varphi(t, x_0)$ roste, protože z rovnice (2.1) plyne $\varphi'(t, x_0) > 0$. Šipka na orbitě $\gamma(x_0)$ proto směřuje nahoru a po sklopení svislé osy x do vodorovné polohy směřuje doprava (viz obrázek 10).
 - Podobně, je-li funkce $f(\varphi(t, x_0))$ záporná, potom z rovnice (2.1) plyne $\varphi'(t, x_0) < 0$ a řešení $\varphi(t, x_0)$ klesá. Šipka na orbitě $\gamma(x_0)$ směřuje dolů a po sklopení osy x směřuje doleva.



Obrázek 10: Chování orbity a řešení rovnice (2.1) pro kladné hodnoty $f(x)$.

Navíc platí následující věta.

Věta 2.2 *Nechť $f \in C^1(\mathbb{R})$. Řešení $\varphi(t, x_0)$ rovnice (2.1) definované na (a_{x_0}, b_{x_0}) buď pro $t \rightarrow \infty$ (je-li $b_{x_0} = \infty$) konverguje ke kritickému bodu rovnice (2.1), nebo má nekonečnou limitu pro $t \rightarrow b_{x_0} \leq \infty$.*

Důkaz. Necht' $\varphi(t, x_0)$ není konstantní, tj. není kritickým bodem rovnice (2.1). Pak je rostoucí, nebo klesající funkcí proměnné t a má tedy pro $t \rightarrow b_{x_0}$ buď nekonečnou limitu, nebo existuje $l \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = l$ (v tomto případě je $b_{x_0} = \infty$). Proto existuje také $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi(t, x_0)) = f(l)$ a z rovnice (2.1) plyne, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t, x_0) = f(l)$. Necht' $f(l) \neq 0$. Pak $\varphi(t, x_0)$ je neomezená, což je ve sporu s tím, že má konečnou limitu l . Proto musí platit $f(l) = 0$, tj. l je kritický bod rovnice (2.1). \square

Stabilitu kritického bodu rovnice (2.1) lze někdy určit z derivace funkce f .

Věta 2.3 *Necht' $f \in C^1(\mathbb{R})$ a necht' $\bar{x} \in G$ je kritický bod rovnice (2.1).
Je-li $f'(\bar{x}) < 0$, je \bar{x} asymptoticky stabilní.
Je-li $f'(\bar{x}) > 0$, je \bar{x} nestabilní.*

Důkaz. (i) Necht' $f'(\bar{x}) < 0$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in (\bar{x} - r, \bar{x})$ a $f(x) < 0$ pro každé $x \in (\bar{x}, \bar{x} + r)$. Tedy pro $x_0 \in (\bar{x} - r, \bar{x})$ je řešení $\varphi(t, x_0)$ rostoucí funkcí proměnné t , jejíž graf leží pod grafem konstantní funkce \bar{x} . Podle věty 2.2 platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}.$$

Podobně pro $x_0 \in (\bar{x}, \bar{x} + r)$ je řešení $\varphi(t, x_0)$ klesající funkcí konvergující k \bar{x} pro $t \rightarrow \infty$.

To znamená, že \bar{x} je asymptoticky stabilní.

(ii) Necht' $f'(\bar{x}) > 0$. Pak mohou nastat dvě možnosti pro $x > \bar{x}$:

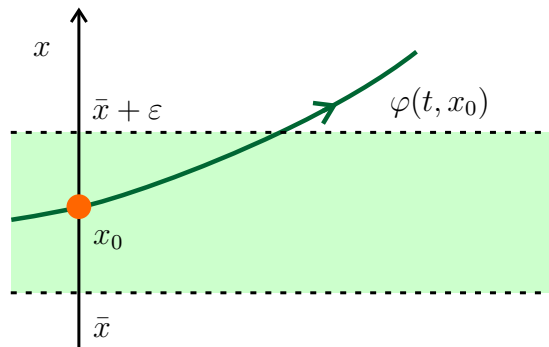
a) $f(x) > 0$ pro každé $x > \bar{x}$. To znamená, že rovnice (2.1) nemá žádný kritický bod větší než \bar{x} a zvolíme-li $x_0 > \bar{x}$, potom podle věty 2.2 platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \infty.$$

b) Existuje $\bar{x}_1 > \bar{x}$ takové, že $f(\bar{x}_1) = 0$ a $f(x) > 0$ pro každé $x \in (\bar{x}, \bar{x}_1)$. Zvolíme-li $x_0 \in (\bar{x}, \bar{x}_1)$, pak řešení $\varphi(t, x_0)$ je rostoucí a jeho graf leží v pásu mezi rovnoběžkami $x = \bar{x}$ a $x = \bar{x}_1$. Podle věty 2.2 platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}_1.$$

Uvažujeme pás ohraničený přímkami $x = \bar{x}$ a $x = \bar{x} + \varepsilon$. Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ protne pro každé $x_0 \in (\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$ v obou případech graf řešení $\varphi(t, x_0)$ přímkou $x = \bar{x} + \varepsilon$ (viz obrázek 11).



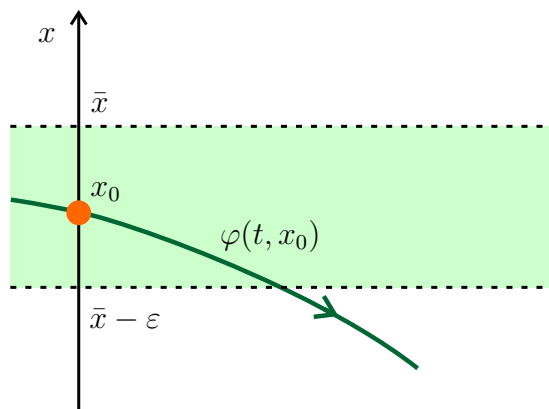
Obrázek 11: Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ protne graf řešení $\varphi(t, x_0)$ přímku $x = \bar{x} + \varepsilon$.

Podobně dostáváme dvě možnosti pro $x < \bar{x}$:

$$\text{buď } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = -\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}_2,$$

kde \bar{x}_2 je nejbližší kritický bod rovnice (2.1) nalevo od \bar{x} ($\bar{x}_2 < \bar{x}$).

Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ protne pro každé $x_0 \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x})$ v obou případech graf řešení $\varphi(t, x_0)$ přímku $x = \bar{x} - \varepsilon$ (viz obrázek 12).



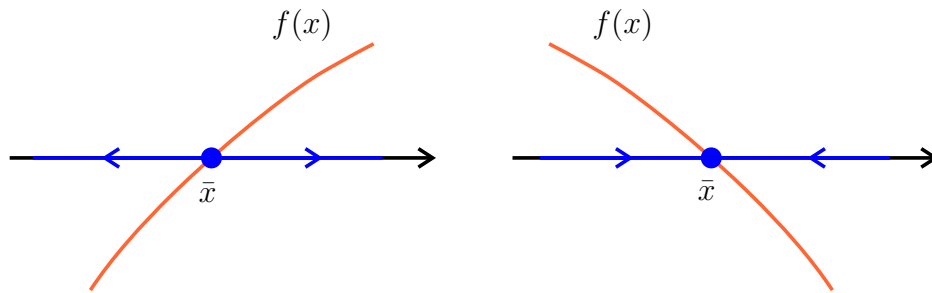
Obrázek 12: Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ protne graf řešení $\varphi(t, x_0)$ přímku $x = \bar{x} - \varepsilon$.

Dokázali jsme, že \bar{x} je nestabilní. □

Pomocí věty 2.3 můžeme rozhodovat o stabilitě kritického bodu \bar{x} , pokud $f'(\bar{x}) \neq 0$. Platí-li $f'(\bar{x}) = 0$, nedává věta 2.3 žádnou informaci o stabilitě kritického bodu \bar{x} . Z tohoto pohledu proto rozlišujeme dva základní typy kritických bodů.

Definice 2.4 Kritický bod $\bar{x} \in G$ rovnice (2.1) se nazývá *hyperbolický* (HKB), platí-li $f'(\bar{x}) \neq 0$.

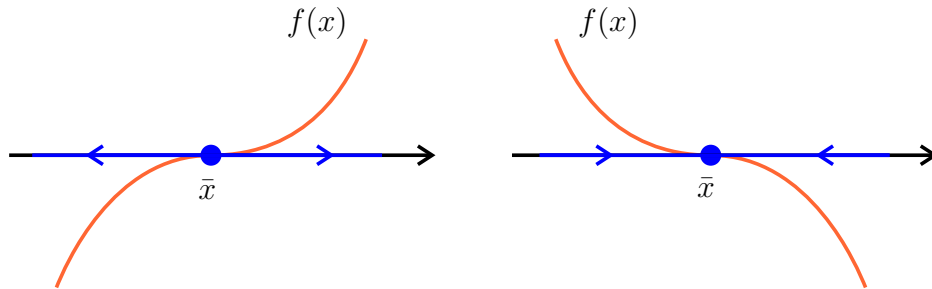
Kritický bod $\bar{x} \in G$ rovnice (2.1) se nazývá *nehyperbolický* (NKB), platí-li $f'(\bar{x}) = 0$.



Obrázek 13: Vlevo je \bar{x} nestabilní HKB ($f'(\bar{x}) > 0$), vpravo je \bar{x} asymptoticky stabilní HKB ($f'(\bar{x}) < 0$).

Věta 2.3 říká, že u HKB mohou nastat pouze dva případy — buď je asymptoticky stabilní, nebo nestabilní, přičemž tomuto typu nestability říkáme *oboustranná nestabilita* (obě šipky ve fázovém portrétu směřují od kritického bodu, viz obrázek 13).

Na rozdíl od toho u NKB může navíc nastat jednostranná nestabilita, nebo stabilita, která není asymptotická (viz obrázky 14, 15 a 16).



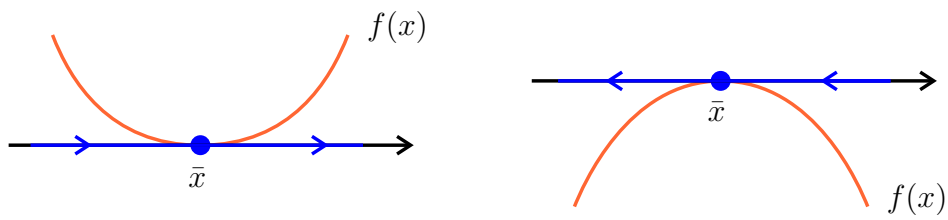
Obrázek 14: Vlevo je \bar{x} nestabilní NKB, vpravo je \bar{x} asymptoticky stabilní NKB.

Příklad 2.5 [Pokračování příkladu 1.1] Funkce $f(x)$ z rovnice (1.1) má tvar $f(x) = -ax$, kde $a > 0$ je parametr. f má jediný nulový bod $\bar{x} = 0$. Z grafu funkce $f(x)$ vidíme, že $f(x) > 0$ pro $x < 0$ a $f(x) < 0$ pro $x > 0$ (viz obrázek 17).

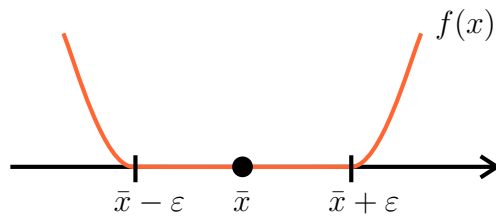
Fázový portrét rovnice (1.1) se skládá ze tří orbit

$$(-\infty, 0), \quad \{0\}, \quad (0, \infty)$$

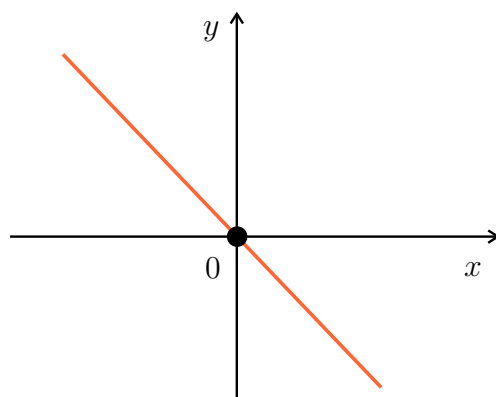
(viz obrázek 18).



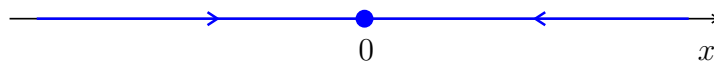
Obrázek 15: Vlevo i vpravo je \bar{x} nestabilní. V obou případech jde o jednostrannou nestabilitu.



Obrázek 16: \bar{x} je stabilní NKB, ale není asymptoticky stabilní.

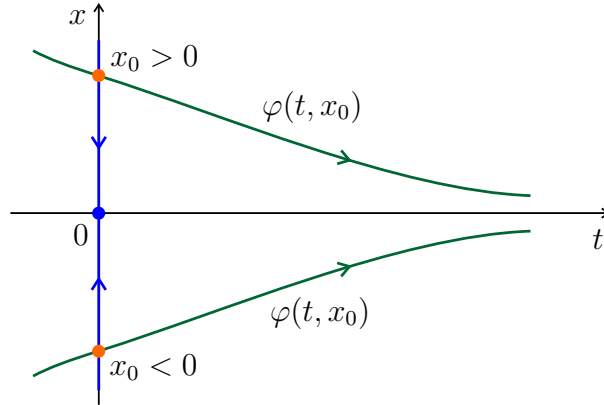


Obrázek 17: Graf funkce $f(x) = -ax$.



Obrázek 18: Fázový portrét rovnice (1.1).

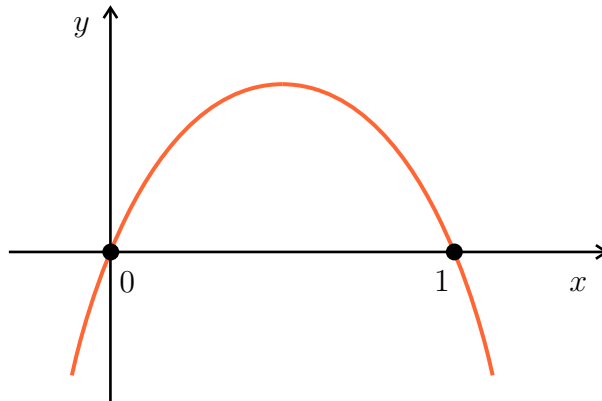
Přetočíme-li osu x do svislé polohy a přidáme-li k ní osu t , můžeme z fázového portréту přibližně načrtnout grafy řešení rovnice (1.1) (viz obrázek 19).



Obrázek 19: Grafy řešení rovnice (1.1).

Protože $f'(x) = -a < 0$, platí $f'(0) < 0$. Kritický bod 0 je HKB a podle věty 2.3 je asymptoticky stabilní. Totéž ukazují i šipky ve fázovém portrétu, které z obou stran směřují k bodu 0.

Příklad 2.6 (Pokračování příkladu 1.2) Funkce $f(x)$ z rovnice (1.2) má tvar $f(x) = rx(1 - x)$, kde $r > 0$ je parametr. Funkce f má dva nulové body 0 a 1.



Obrázek 20: Graf funkce $f(x) = rx(1 - x)$.

Z grafu funkce $f(x)$ vidíme, že

$$f(x) > 0 \text{ pro } x \in (0, 1),$$

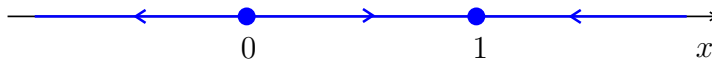
$$f(x) < 0 \text{ pro } x < 0 \text{ nebo } x > 1$$

(viz obrázek 20).

Fázový portrét rovnice (1.2) se skládá z pěti orbit

$$(-\infty, 0), \quad \{0\}, \quad (0, 1), \quad \{1\}, \quad (1, \infty)$$

(viz obrázek 21).



Obrázek 21: Fázový portrét rovnice (1.2).

Protože $f'(x) = r(1 - 2x)$, tak platí $f'(0) = r > 0$ a $f'(1) = -r < 0$. Kritické body 0 a 1 jsou HKB.

Podle věty 2.3 je kritický bod 0 nestabilní a kritický bod 1 asymptoticky stabilní.

V následujících příkladech budeme vyšetřovat závislost fázového portréту rovnice (2.1) na reálném parametru λ .

Příklad 2.7 Uvažujme rovnici

$$x'(t) = x(t) - x^3(t) + \lambda, \quad (2.7)$$

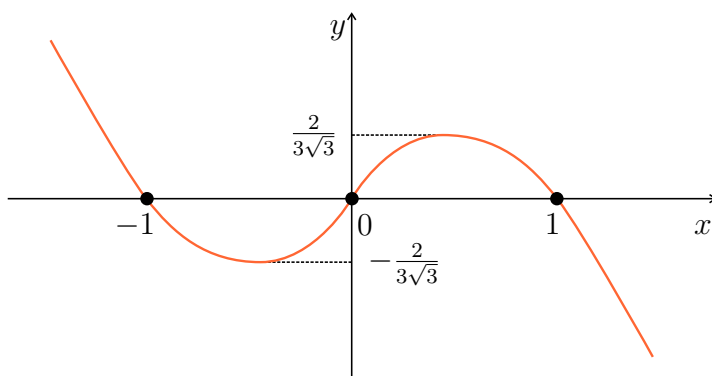
kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr.

- Nechť $\lambda = 0$. Potom funkce $f(x)$ v rovnici (2.7) má tvar $f(x) = x - x^3$ a má tři nulové body $-1, 0$ a 1 (viz obrázek 22).

Z grafu funkce f dostáváme fázový portrét skládající se ze sedmi orbit

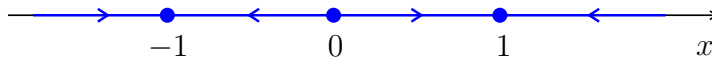
$$(-\infty, -1), \quad \{-1\}, \quad (-1, 0), \quad \{0\}, \quad (0, 1), \quad \{1\}, \quad (1, \infty)$$

(viz obrázek 23).



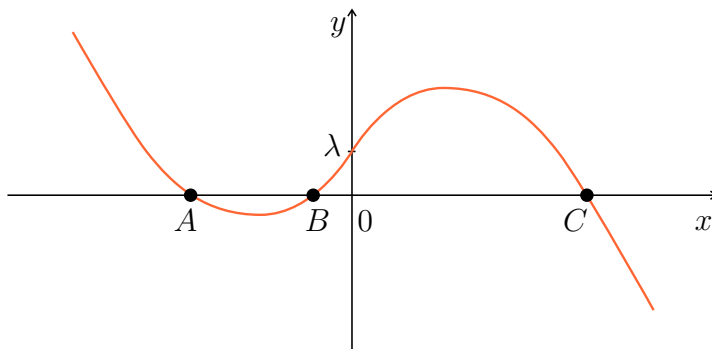
Obrázek 22: Graf funkce $f(x) = x - x^3$.

Kritické body -1 a 1 jsou asymptoticky stabilní, 0 je nestabilní. Všechny tři body $-1, 0, 1$ jsou HKB.

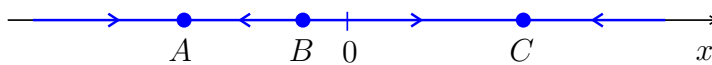


Obrázek 23: Fázový portrét rovnice (2.7) pro $\lambda = 0$.

- Necht' $\lambda \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$. Potom funkce $f(x)$ v rovnici (2.7) má tvar $f(x) = x - x^3 + \lambda$ a má tři nulové body A, B, C , které závisí na konkrétní hodnotě parametru λ (viz obrázek 24).



Obrázek 24: Graf funkce $f(x) = x - x^3 + \lambda$, $\lambda \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$.



Obrázek 25: Fázový portrét rovnice (2.7) pro $\lambda \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$.

Všechny tři kritické body A, B, C jsou HKB, přitom body A, C jsou asymptoticky stabilní a bod B je nestabilní (viz obrázek 25). Počet orbit i stabilita kritických bodů se nemění ve srovnání s případem $\lambda = 0$.

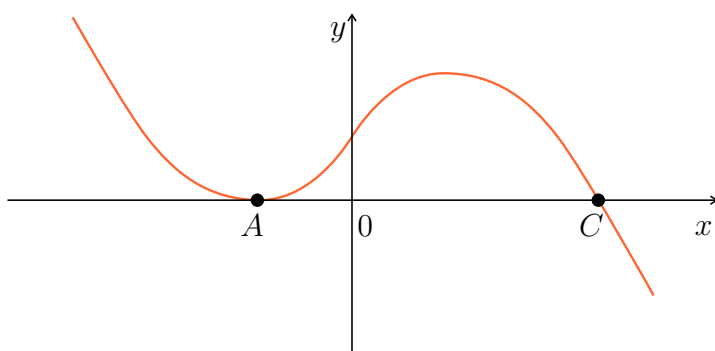
- Necht' $\lambda = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Potom funkce $f(x)$ v rovnici (2.7) má tvar $f(x) = x - x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ a má dva nulové body A, C (viz obrázek 26).

Kritický bod A je NKB a je nestabilní.

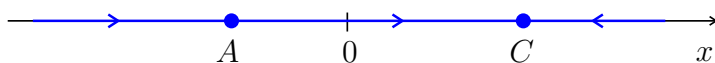
Kritický bod C je HKB a je asymptoticky stabilní (viz obrázek 27).

Došlo ke splynutí kritických bodů A, B do jednoho bodu A a ke změně fázového portréту, počet orbit klesl na 5. Stabilita bodu A se změnila. Říkáme, že rovnice (2.7) je v bifurkaci a hodnotu $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ nazveme bifurkační hodnotou. Bifurkacím je věnována příští kapitola.

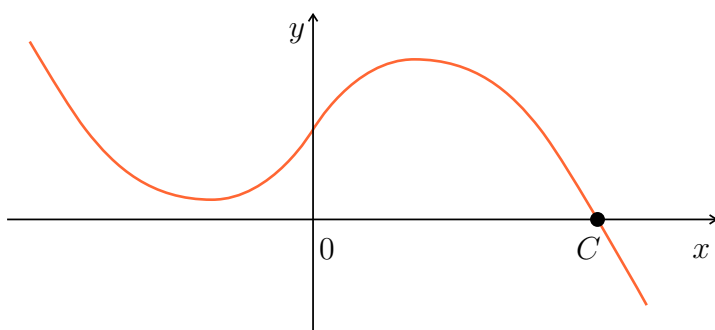
- Necht' $\lambda > \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Pak funkce $f(x) = x - x^3 + \lambda$ má jeden kritický bod C , který je HKB a je asymptoticky stabilní. Došlo ke ztrátě kritického bodu A a počet orbit klesl na 3 (viz obrázek 28, 29).



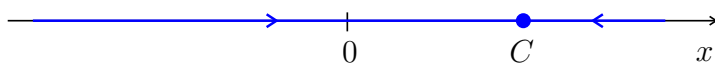
Obrázek 26: Graf funkce $f(x) = x - x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.



Obrázek 27: Fázový portrét rovnice (2.7) pro $\lambda = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.



Obrázek 28: Graf funkce $f(x) = x - x^3 + \lambda$, kde $\lambda > \frac{2}{3\sqrt{3}}$.



Obrázek 29: Fázový portrét rovnice (2.7) pro $\lambda > \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

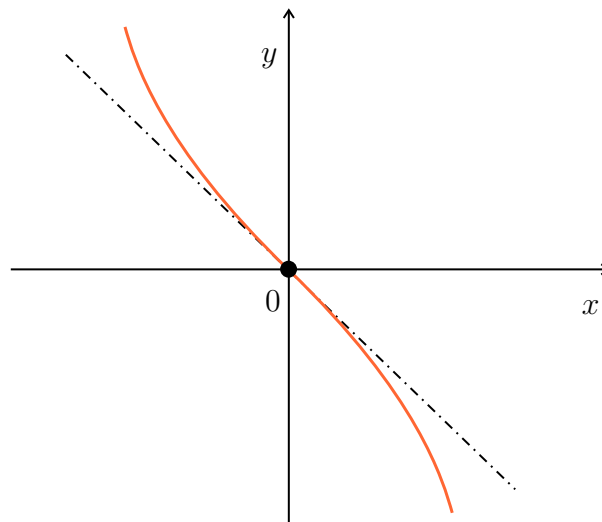
- Podobně lze postupovat pro $\lambda < 0$. Opět dostaneme 3 typy fázových portrétů. Bifurkační hodnota je v tomto případě $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Příklad 2.8 Uvažujme rovnici

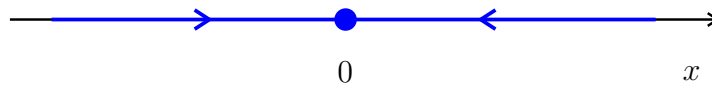
$$x'(t) = -x(t) - x^3(t) + \lambda, \quad (2.8)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr.

- Nechť $\lambda = 0$. Potom funkce $f(x)$ v rovnici (2.8) má tvar $f(x) = -x - x^3$ a má jediný nulový bod 0 (viz obrázek 30). Bod 0 je HKB rovnice (2.8) a je asymptoticky stabilní (viz obrázek 31). Platí $f'(x) = -1 - 3x^2 < 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

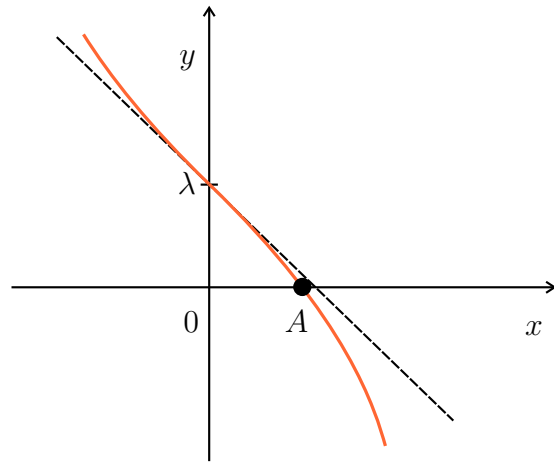


Obrázek 30: Graf funkce $f(x) = -x - x^3$.

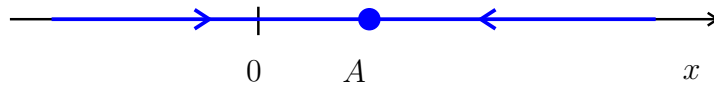


Obrázek 31: Fázový portrét rovnice (2.8) pro $\lambda = 0$.

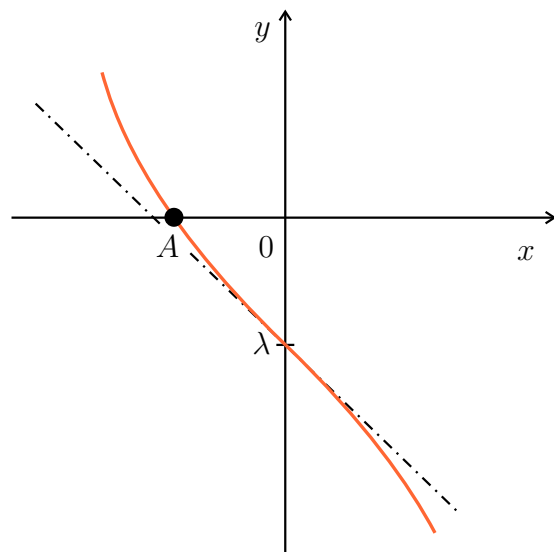
- Nechť $\lambda > 0$. Potom funkce $f(x) = -x - x^3 + \lambda$ má jediný nulový bod A (viz obrázek 32), který je HKB rovnice (2.8) a je asymptoticky stabilní (viz obrázek 33).
- Nechť $\lambda < 0$. Funkce $f(x) = -x - x^3 + \lambda$ má opět jediný nulový bod A (viz obrázek 34), který je HKB rovnice (2.8) a je asymptoticky stabilní (viz obrázek 35).



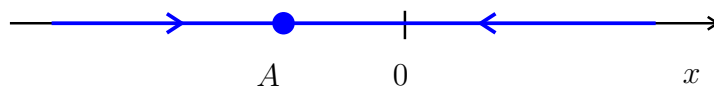
Obrázek 32: Graf funkce $f(x) = -x - x^3 + \lambda$ pro $\lambda > 0$.



Obrázek 33: Fázový portrét rovnice (2.8) pro $\lambda > 0$.



Obrázek 34: Graf funkce $f(x) = -x - x^3 + \lambda$ pro $\lambda < 0$.



Obrázek 35: Fázový portrét rovnice (2.8) pro $\lambda < 0$.

Vidíme, že fázový portrét se při změnách parametru λ neměnil. Rovnice (2.8) má stále jediný asymptoticky stabilní HKB. Žádná hodnota parametru λ není bifurkační hodnotou.

V následující kapitole ukážeme podmínky nutné pro vznik lokální bifurkace a ukážeme nejdůležitější elementární bifurkace skalárních dynamických systémů generovaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi prvního řádu s jedním reálným parametrem.

3 Elementární bifurkace skalárních dynamických systémů



Cílem této kapitoly je vysvětlit:

- co je lokální bifurkace a kdy nastává,
- co je bifurkační diagram a jak se určuje,
- co je sedlová, vidlová a transkritická bifurkace.

Uvažujme diferenciální rovnici tvaru

$$x'(t) = F(c, x(t)), \quad (3.1)$$

závislou na jednom reálném parametru c .

Předpokládejme, že pro hodnotu 0 parametru c má rovnice (3.1) kritický bod 0, tedy platí

$$F(0, 0) = 0. \quad (3.2)$$

Dále předpokládejme, že $F \in C^1(G)$ a G je otevřená množina v \mathbb{R}^2 obsahující bod $(0, 0)$.

Poznámka 3.1 Pokud by rovnice (3.1) měla kritický bod $\bar{x} \neq 0$ pro nějakou hodnotu \bar{c} parametru c , pak lze vždy rovnici (3.1) transformovat na rovnici tvaru

$$y'(t) = \tilde{F}(a, y(t)), \quad (3.3)$$

závislou na reálném parametru a , která pro $a = 0$ má kritický bod 0. Stačí užít substituci

$$y = x - \bar{x}, \quad a = c - \bar{c}.$$

Potom

$$y'(t) = x'(t) = F(c, x(t)) = F(a + \bar{c}, y(t) + \bar{x}) = \tilde{F}(a, y(t)).$$

Předpokládejme, že známe fázový portrét rovnice (3.1) pro $c = 0$ v okolí kritického bodu 0. Nyní začněme měnit hodnoty parametru c . Buď tyto hodnoty budou růst z nulové do malých kladných hodnot, nebo klesat z nulové do malých (v absolutní hodnotě) záporných hodnot.

Definice 3.2 Jestliže se při změnách hodnot parametru c fázový portrét rovnice (3.1) v okolí bodu $x = 0$ změní (tj. změní se počet kritických bodů nebo jejich stabilita), říkáme, že rovnice (3.1) je v bodě $(c, x) = (0, 0)$ v *bifurkaci* a hodnotu $c = 0$ nazveme *bifurkační hodnotou*. Hovoříme zde o *lokální bifurkaci*, protože fázové portréty rovnice (3.1) vyšetřujeme pouze na okolí bodu $x = 0$.

Věta 3.3 *Nutnou podmínkou pro existenci lokální bifurkace je, aby kritický bod 0 byl nehyperbolický kritický bod, tj. aby platilo*

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Důkaz. Ukážeme, že pokud kritický bod 0 bude hyperbolický kritický bod, lokální bifurkace nenastane.

Předpokládejme tedy, že platí

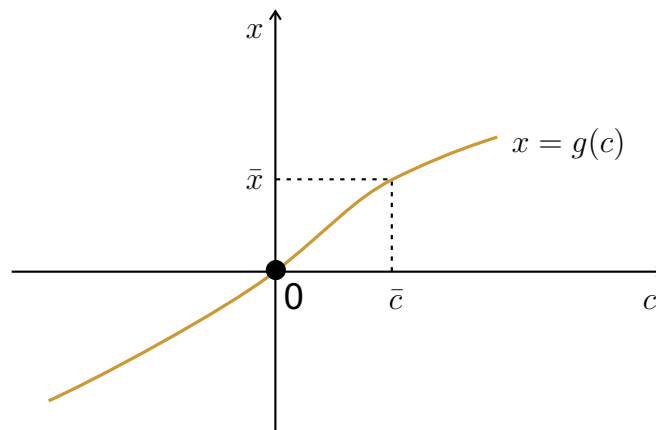
$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \neq 0. \quad (3.5)$$

To znamená, že pro $c = 0$ má rovnice (3.1) kritický bod 0 a přitom z nenulovosti parciální derivace plyne, že tento kritický bod je HKB (viz definici 2.4).

Podle věty o implicitní funkci podmínka (3.5) zaručuje existenci jediného spojitého řešení $x = g(c)$ rovnice $F(c, x) = 0$ v jistém okolí bodu $(0, 0)$. Funkce $g(c)$ splňuje

$$g(0) = 0 \quad \text{a} \quad F(c, g(c)) = 0$$

pro každé c z okolí 0. Tedy každému \bar{c} z okolí 0 odpovídá jediný kritický bod \bar{x} z okolí 0, přičemž $\bar{x} = g(\bar{c})$ (viz obrázek 36).



Obrázek 36: Každému \bar{c} z okolí 0 odpovídá jediný kritický bod \bar{x} z okolí 0, přičemž $\bar{x} = g(\bar{c})$.

Stabilita kritického bodu \bar{x} je dána znaménkem derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x})$ (věta 2.3). Protože $F \in C^1(G)$, je funkce $\frac{\partial F}{\partial x}$ spojitá v G , a proto pro (\bar{c}, \bar{x}) z dostatečně malého okolí bodu $(0, 0)$ bude mít $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x})$ stejné znaménko jako $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$. Proto v okolí bodu $(0, 0)$ se fázový portrét rovnice (3.1) pro malé odchylky c od 0 nemění a lokální bifurkace nenastane. \square

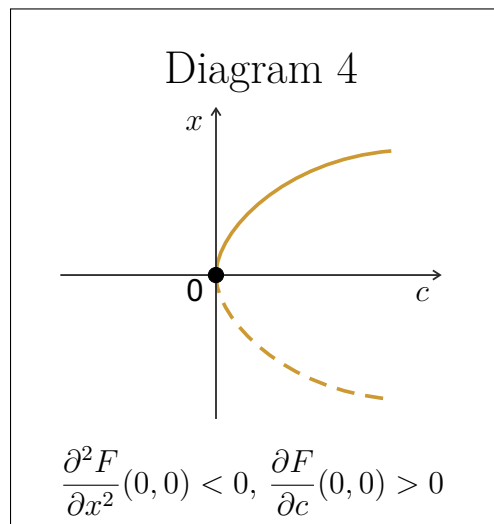
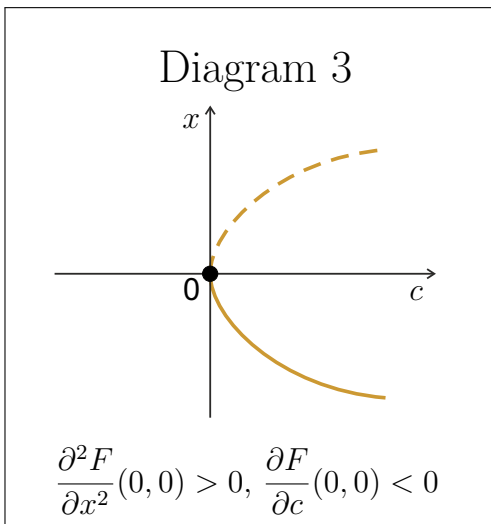
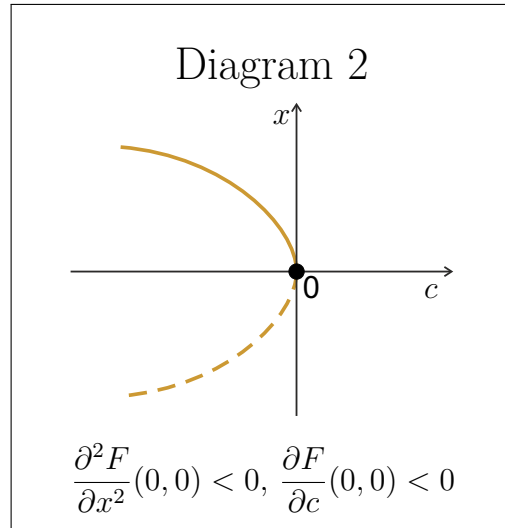
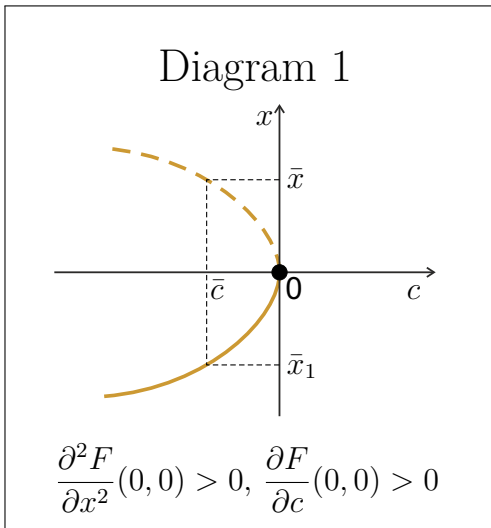
Nejčastější typ lokální bifurkace u rovnice (3.1) je *sedlová bifurkace*. Podmínky pro její existenci udává následující věta.

Věta 3.4 (O sedlové bifurkaci) *Nechť $F \in C^2(G)$ splňuje (3.4) a navíc platí*

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. \quad (3.6)$$

Potom má rovnice (3.1) v bodě $(0,0)$ sedlovou bifurkaci.

Tato bifurkace má jeden ze čtyř bifurkačních diagramů na obrázku 37 v závislosti na znaménkách parciálních derivací v (3.6).



Obrázek 37: Sedlová bifurkace má jeden z těchto čtyř bifurkačních diagramů (v závislosti na znaménkách parciálních derivací v (3.6)).

Poznámka 3.5 Bifurkační diagramy ukazují, kolik kritických bodů x odpovídá zvolené hodnotě parametru c . Podávají informaci o stabilitě kritických bodů.

Například v Diagramu 1 vidíme, že každé záporné hodnotě \bar{c} přísluší dva body \bar{x} a \bar{x}_1 . Přerušovaný oblouk znamená, že bod \bar{x} je nestabilní a plný oblouk značí, že bod \bar{x}_1 je asymptoticky stabilní.

Dále v Diagramu 1 vidíme, že hodnotě $c = 0$ přísluší jediný kritický bod $x = 0$ a kladným hodnotám parametru c nepřísluší žádné kritické body.

Z Diagramu 1 tedy dostáváme následující informaci o změnách fázového portréту rovnice (3.1) v okolí bodu $(0, 0)$:

- (i) je-li $c < 0$, má rovnice (3.1) v okolí 0 dva kritické body: nestabilní kladný kritický bod a asymptoticky stabilní záporný kritický bod;
- (ii) je-li $c = 0$, má rovnice (3.1) jediný kritický bod 0;
- (iii) je-li $c > 0$, nemá rovnice (3.1) žádný kritický bod.

Podobné informace můžeme dostat z Diagramů 2–4.

Důkaz věty 3.4. 1. Podle věty o implicitní funkci podmínky

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) \neq 0$$

zaručují existenci jediného spojitého řešení $c = \psi(x)$ rovnice $F(c, x) = 0$ v okolí bodu $(c, x) = (0, 0)$. Toto okolí budeme značit $U(0, 0)$. Podobně okolí bodu $x = 0$ resp. $c = 0$ budeme značit $U_x(0)$ resp. $U_c(0)$. Předpokládáme, že

$$U_c(0) \times U_x(0) \subset U(0, 0) \subset G, \quad (3.7)$$

a že uvedená okolí jsou tak malá, že na nich platí všechny následující úvahy. Funkce $\psi(x)$ splňuje podmínky $\psi(0) = 0$ a

$$F(\psi(x), x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in U_x(0). \quad (3.8)$$

Navíc podle věty o implicitní funkci platí, že $\psi \in C^2(U_x(0))$ a

$$\psi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(x), x)}{\frac{\partial F}{\partial c}(\psi(x), x)} \quad \text{pro každé } x \in U_x(0), \quad (3.9)$$

$$\psi'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0)} = 0, \quad (3.10)$$

$$\psi''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0)} \neq 0. \quad (3.11)$$

Tedy funkce $\psi(x)$ má v bodě $x = 0$ ostrý lokální extrém.

2. Předpokládejme nyní, že platí

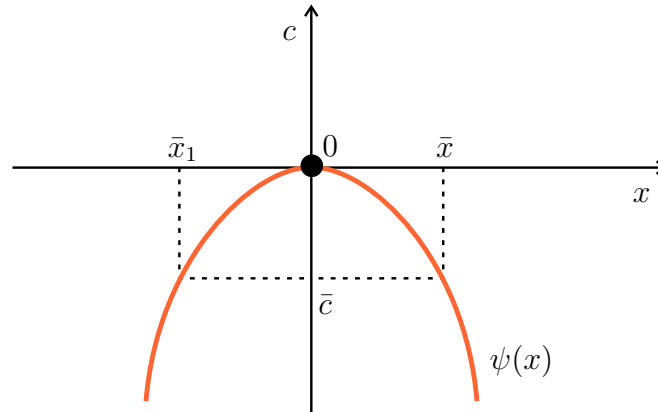
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) > 0. \quad (3.12)$$

Potom podle (3.11) je $\psi''(0) < 0$ a funkce $\psi(x)$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum, které je rovno 0.

To znamená, že je-li $x \in U_x(0)$ a $x \neq 0$, potom $\psi(x) < 0$ a libovolné záporné hodnotě $\bar{c} \in U_c(0)$ lze přiřadit právě dvě hodnoty $\bar{x}, \bar{x}_1 \in U_x(0)$ tak, že

$$\bar{c} = \psi(\bar{x}), \quad \bar{c} = \psi(\bar{x}_1) \quad (3.13)$$

(viz obrázek 38)



Obrázek 38: Graf funkce $\psi(x)$.

Z (3.8) a (3.13) plyne, že platí

$$F(\bar{c}, \bar{x}) = 0, \quad F(\bar{c}, \bar{x}_1) = 0.$$

To znamená, že pro hodnotu parametru $\bar{c} < 0$ má rovnice (3.1) dva kritické body $\bar{x} > 0$ a $\bar{x}_1 < 0$.

3. Určíme stabilitu těchto bodů.

Protože $\psi''(0) < 0$ a $\psi \in C^2(U_x(0))$, lze předpokládat, že $U_x(0)$ je tak malé, že $\psi'(x)$ je klesající na $U_x(0)$.

Jelikož $\psi'(0) = 0$, dostáváme pro libovolné $x \in U_x(0)$

$$\psi'(x) > 0, \quad \text{je-li } x < 0, \quad \psi'(x) < 0, \quad \text{je-li } x > 0. \quad (3.14)$$

Dále z (3.12) a předpokladu $F \in C^2(G)$ plyne

$$\frac{\partial F}{\partial c}(\psi(x), x) > 0, \quad \text{pro každé } x \in U_x(0). \quad (3.15)$$

Ze vzorce (3.9) a nerovností (3.14) a (3.15) dostáváme pro $x \in U_x(0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(x), x) < 0, \quad \text{je-li } x < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\psi(x), x) > 0, \quad \text{je-li } x > 0.$$

Speciálně pro kritické body \bar{x} a \bar{x}_1 platí vzhledem k (3.13)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x}) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{c}, \bar{x}_1) < 0.$$

Podle věty 2.3 je proto \bar{x} nestabilní kritický bod a \bar{x}_1 asymptoticky stabilní kritický bod rovnice (3.1).

Překlopíme-li osy c a x a na grafu funkce $\psi(x)$ vyznačíme odvozenou stabilitu kladných a záporných kritických bodů, dostaneme Diagram 1.

4. Podobně postupujeme při odvození Diagramů 2–4. □

Příklad 3.6 Následující čtyři diferenciální rovnice jsou nejjednodušší příklady rovnic se sedlovou bifurkací.

$$x'(t) = c + x^2(t), \tag{3.16}$$

$$x'(t) = -c - x^2(t), \tag{3.17}$$

$$x'(t) = -c + x^2(t), \tag{3.18}$$

$$x'(t) = c - x^2(t). \tag{3.19}$$

Funkce $F(c, x)$ v rovnici (3.16) má tvar $F(c, x) = c + x^2$. Platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(c, x) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c, x) = 2.$$

Tedy

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 2.$$

Vidíme, že F splňuje podmínky (3.4) a (3.6), a proto rovnice (3.16) má v bodě $(0, 0)$ sedlovou bifurkaci.

Navíc, protože $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) > 0$ a $\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) > 0$, má bifurkační diagram rovnice (3.16) tvar Diagramu 1, který interpretujeme podle poznámky 3.5.

Podobně lze vyšetřit rovnice (3.17)–(3.19). Zjistíme, že rovnici (3.17) odpovídá Diagram 2, rovnici (3.18) Diagram 3 a rovnici (3.19) Diagram 4.

Pokud jsou obě parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial c}$ a $\frac{\partial F}{\partial x}$ funkce F v bodě $(0, 0)$ nulové, nelze užít větu o implicitní funkci a zaručit tak existenci spojitého řešení $x = g(c)$ nebo $c = \psi(x)$ rovnice $F(c, x) = 0$ v okolí bodu $(0, 0)$. V takovém případě mohou nastat další typy lokálních bifurkací, které jsou charakterizovány v následujících větách.

Věta 3.7 (O transkritické bifurkaci) *Nechť $F \in C^3(G)$ splňuje (3.4) a navíc platí*

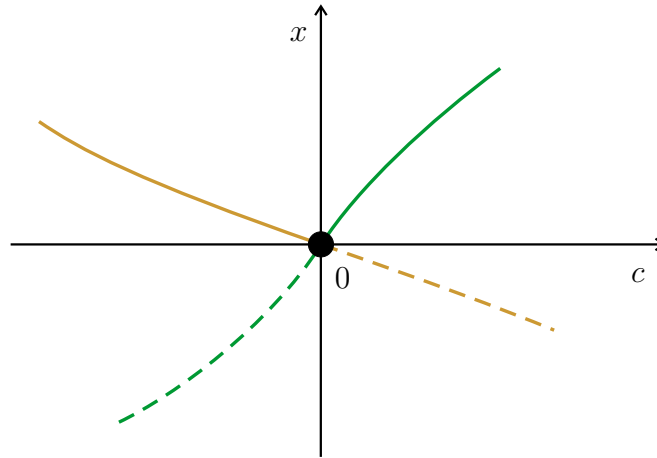
$$\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0) & \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0) \end{array} \right| < 0. \quad (3.20)$$

Potom má rovnice (3.1) v bodě $(0, 0)$ transkritickou bifurkaci.

Bifurkační diagram se skládá ze dvou křivek protínajících se v počátku a měnících při přechodu počátkem stabilitu.

Jeden z možných tvarů diagramů je na obrázku 39.

Diagram 5



Obrázek 39: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkaci.

Poznámka 3.8 Diagram 5 dává následující informaci o změnách fázového portréту rovnice (3.1) v okolí bodu $(0, 0)$:

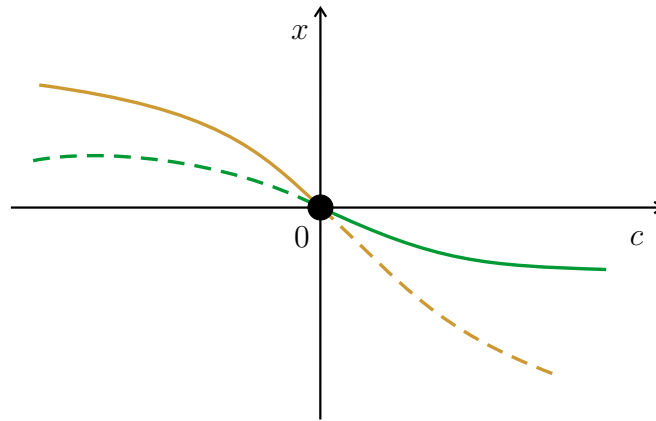
- (i) je-li $c < 0$, má rovnice (3.1) v okolí bodu 0 kladný asymptoticky stabilní kritický bod a záporný nestabilní kritický bod;
- (ii) je-li $c = 0$, má rovnice (3.1) jediný kritický bod 0;
- (iii) je-li $c > 0$, má rovnice (3.1) kladný asymptoticky stabilní kritický bod a záporný nestabilní kritický bod.

Dvě protínající se křivky v bifurkačním diagramu transkritické bifurkace nazýváme větve. Přesnější umístění větví v rovině závisí na druhých parciálních derivacích funkce F v bodě $(0, 0)$. Je-li například

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0) > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0) > 0,$$

potom obě větve leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu a diagram je na obrázku 40.

Diagram 6



Obrázek 40: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkaci.

Důkaz věty 3.7. Stejně jako v předchozím důkazu označíme $U(0, 0)$ okolí bodu $(c, x) = (0, 0)$, $U_x(0)$ okolí bodu $x = 0$ a $U_c(0)$ okolí bodu $c = 0$.

Dále budeme předpokládat, že platí (3.7) a že uvedená okolí jsou tak malá, že na nich platí všechny následující úvahy.

Pro funkci $F(c, x)$ lze užít Taylorův vzorec v bodě $(0, 0)$:

$$F(c, x) = F(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) \cdot c + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0)cx + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0)c^2 \right) + \omega(c, x),$$

kde $(c, x) \in U(0, 0)$ a

$$\lim_{(c, x) \rightarrow (0, 0)} \frac{\omega(c, x)}{c^2 + x^2} = 0. \quad (3.21)$$

Označme

$$\alpha = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0), \quad \beta = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0), \quad \gamma = \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0),$$

$$\tilde{F}(c, x) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta cx + \gamma c^2).$$

Potom vzhledem k předpokladům (3.4) a (3.20) platí

$$F(c, x) = \tilde{F}(c, x) + \omega(c, x) \quad \text{pro } (c, x) \in U(0, 0). \quad (3.22)$$

Určíme nulové body funkce \tilde{F} v $U(0, 0)$ a určíme jejich stabilitu. Funkce F pak bude mít v $U(0, 0)$ stejný počet nulových bodů se stejným typem stability. To plyne z předpokladu $F \in C^3(G)$ a rovností (3.21) a (3.22).

Řešíme tedy kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + 2\beta cx + \gamma c^2 &= 0, \\ x_{1,2} &= \left(\frac{-\beta}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \right) c. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Z poslední podmínky v (3.20) plyne $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$.

Vzorec (3.23) tedy určuje dvě přímky v rovině (c, x) . Části těchto přímek ležící v okolí $U(0, 0)$ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} x = \tilde{\psi}_1(c) : \tilde{\psi}_1(c) = \frac{c}{\alpha}(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}), & c \in U_c(0), \\ x = \tilde{\psi}_2(c) : \tilde{\psi}_2(c) = \frac{c}{\alpha}(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}), & c \in U_c(0). \end{cases} \quad (3.24)$$

Označíme-li k_1 směrnici přímky $x = \tilde{\psi}_1(c)$ a k_2 směrnici přímky $x = \tilde{\psi}_2(c)$, dostáváme rovnice

$$\begin{cases} x = k_1 c, & c \in U_c(0), \\ x = k_2 c, & c \in U_c(0). \end{cases} \quad (3.25)$$

V závislosti na znaménkách a hodnotách α, β, γ mohou být směrnice k_1 a k_2 kladné, záporné i nulové.

V bifurkačním diagramu rovnice (3.1) pak budou dvě křivky (větve) $x = \psi_1(c)$, $x = \psi_2(c)$, procházející počátkem a dotýkající se přímek $x = k_1 c$, $x = k_2 c$.

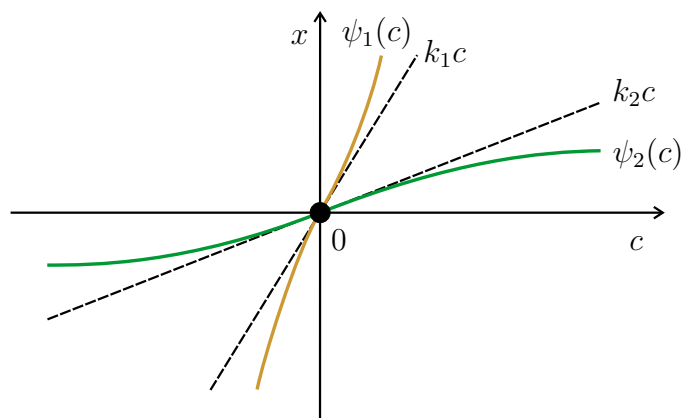
Jsou-li například $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, grafy křivek ψ_1 a ψ_2 mohou vypadat jako na obrázku 41.

Znaménko funkce $\frac{\partial F}{\partial x}(c, \psi_1(c))$ pro $c \in U_c(0)$ dává asymptotickou stabilitu nebo nestabilitu kritických bodů určených větví $x = \psi_1(c)$. Toto znaménko se shoduje se znaménkem funkce $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, \tilde{\psi}_1(c))$. Protože $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, x) = \alpha x + \beta c$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, \tilde{\psi}_1(c)) &= \alpha \tilde{\psi}_1(c) + \beta c = \alpha \left[\frac{c}{\alpha}(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) \right] + \beta c = \\ &= -\beta c + c\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} + \beta c = c\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Tedy pro $c \in U_c(0)$ platí

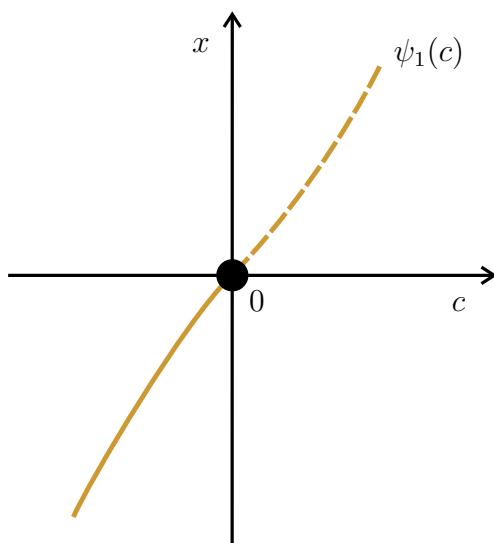
$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, \tilde{\psi}_1(c)) > 0, \quad \text{je-li } c > 0,$$



Obrázek 41: Grafy křivek $x = \psi_1(c)$ a $x = \psi_2(c)$ procházejí počátkem a dotýkají se přímkou $x = k_1c$ a $x = k_2c$.

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, \tilde{\psi}_1(c)) < 0, \quad \text{je-li } c < 0.$$

Totéž platí i pro $\frac{\partial F}{\partial x}(c, \psi_1(c))$. Proto podle věty 2.3 určuje část větve $x = \psi_1(c)$, $c > 0$, nestabilní kritické body a část větve $x = \psi_1(c)$, $c < 0$, asymptoticky stabilní kritické body.



Obrázek 42: Část větve $x = \psi_1(c)$ pro $c > 0$ určuje nestabilní kritické body a pro $c < 0$ asymptoticky stabilní kritické body.

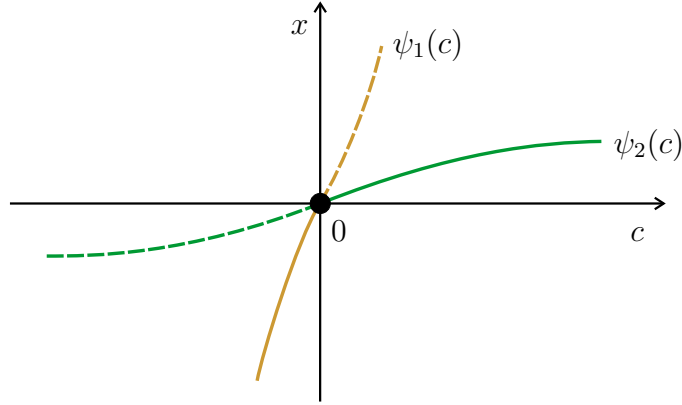
Stejně postupujeme při určování stability kritických bodů určených větví $x = \psi_2(c)$. Dostáváme

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(c, \tilde{\psi}_2(c)) = -c\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

Proto část větve $x = \psi_2(c)$, $c > 0$, určuje asymptoticky stabilní kritické body a část větve $x = \psi_2(c)$, $c < 0$, nestabilní kritické body.

Bifurkační diagram (pro $k_1 > 0$ a $k_2 > 0$) může vypadat jako na obrázku 43.

Diagram 7



Obrázek 43: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkaci.

□

Příklad 3.9 Následující čtyři diferenciální rovnice jsou nejjednodušší příklady rovnic s transkritickou bifurkací.

$$x'(t) = x^2(t) + cx(t), \quad (3.26)$$

$$x'(t) = x^2(t) - cx(t), \quad (3.27)$$

$$x'(t) = -x^2(t) + cx(t), \quad (3.28)$$

$$x'(t) = -x^2(t) - cx(t). \quad (3.29)$$

Funkce $F(c, x)$ v rovnici (3.26) má tvar $F(c, x) = x^2 + cx$.

Platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) = 2x + c, \quad \frac{\partial F}{\partial c}(c, x) = x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c, x) = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(c, x) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(c, x) = 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) = F(0, 0) = 0,$$

$$\alpha := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 2, \quad \beta := \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial c}(0, 0) = 1, \quad \gamma := \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(0, 0) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Vidíme, že $F(c, x)$ splňuje podmínky (3.4) a (3.20), a proto podle věty 3.7 má rovnice (3.26) v bodě $(0, 0)$ transkritickou bifurkaci. Sledujeme-li postup v důkazu věty 3.7, tak určíme směrnice tečen k bifurkačním křivkám. Podle (3.24) a (3.25) je

$$k_1 = \frac{1}{\alpha} \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \right) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0,$$

$$k_2 = \frac{1}{\alpha} \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \right) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1.$$

Bifurkační křivky $x = \psi_1(c)$ a $x = \psi_2(c)$ procházejí bodem $(0, 0)$. Přitom křivka $x = \psi_1(c)$ se dotýká osy c a křivka $x = \psi_2(c)$ se dotýká přímky $x = -c$.

Vzhledem k jednoduchosti funkce $F(c, x) = x^2 + cx$ v tomto příkladě, můžeme křivky $x = \psi_1(c)$ a $x = \psi_2(c)$ přímo určit z rovnice $x^2 + cx = 0$. Dostáváme $x_1 = 0$ a $x_2 = -c$.

Tedy křivky mají rovnice $x = \psi_1(c) = 0$ a $x = \psi_2(c) = -c$.

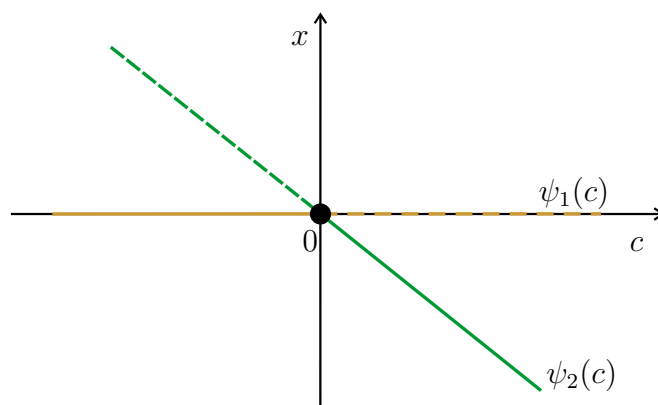
To znamená, že bifurkační křivky splývají se svými tečnami v bodě $(0, 0)$. Dále je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, \psi_1(c)) = \frac{\partial F}{\partial x}(c, 0) = c,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, \psi_2(c)) = \frac{\partial F}{\partial x}(c, -c) = -c.$$

Odsud dostáváme typ stability na větvích. Bifurkační diagram rovnice (3.26) je Diagram 8 na obrázku 44.

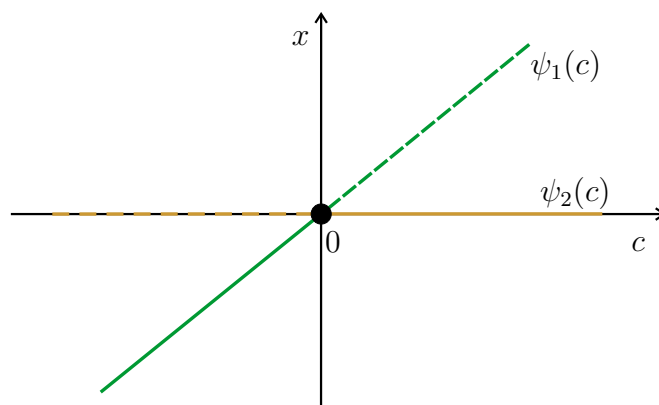
Diagram 8



Obrázek 44: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkaci.

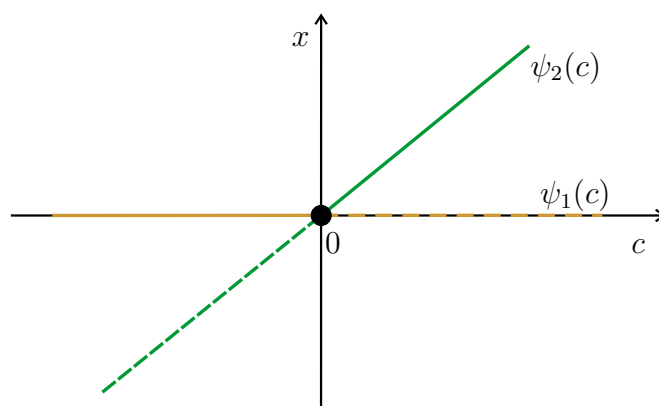
Podobně dostáváme pro rovnici (3.27) Diagram 9, pro rovnici (3.28) Diagram 10 a pro rovnici (3.29) Diagram 11 na obrázcích 45–47.

Diagram 9



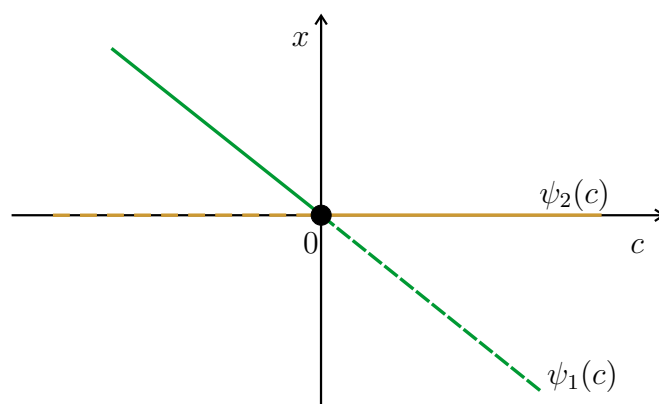
Obrázek 45: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkací.

Diagram 10



Obrázek 46: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkací.

Diagram 11



Obrázek 47: Jeden z možných tvarů diagramu pro transkritickou bifurkaci.

Další typ lokální bifurkace budeme ilustrovat na rovnici

$$x'(t) = x(t) \cdot F(c, x(t)), \quad (3.30)$$

v níž opět vystupuje jeden reálný parametr c , a která je speciálním případem rovnice (3.1).

Věta 3.10 (O vidlové bifurkaci) *Nechť $F \in C^2(G)$ splňuje (3.4) a (3.6). Pak má rovnice (3.30) v bodě $(0, 0)$ vidlovou bifurkaci. Tato bifurkace má jeden z bifurkačních diagramů 12–15 na obrázku 48 (v závislosti na znaménkách parciálních derivací v (3.6)).*

Poznámka 3.11 Diagramy 12–15 na obrázku 48 se skládají ze dvou větví, které se protínají v počátku. Jednou z větví je část osy c , která mění při přechodu počátkem stabilitu. Druhou z větví je oblouk, který určuje buď dvojici asymptoticky stabilních kritických bodů rovnice (3.30) (Diagramy 13 a 15) nebo dvojici nestabilních kritických bodů (Diagramy 12 a 14).

Důkaz věty 3.10. 1. Nechť platí předpoklady o okolích $U(0, 0)$, $U_c(0)$ a $U_x(0)$ jako v důkazu věty 3.7. Kritické body rovnice (3.30) v $U(0, 0)$ určíme z rovnice

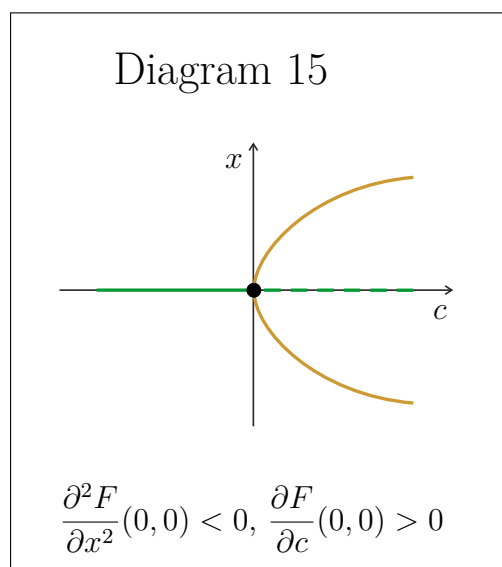
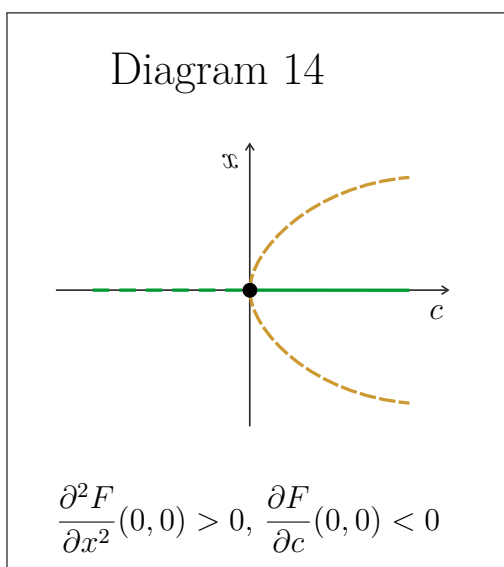
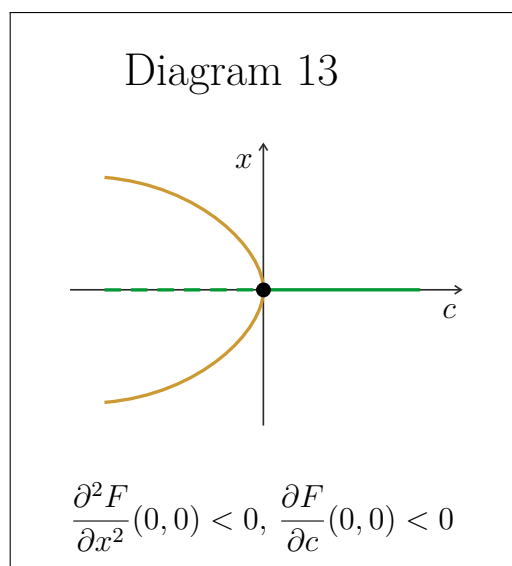
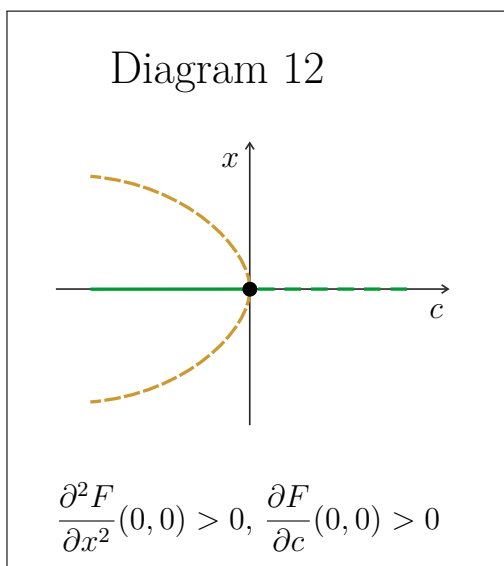
$$xF(c, x) = 0.$$

Tato rovnice je splněna, pokud platí

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad F(c, x) = 0.$$

Z rovnice $x = 0$ dostáváme první větev diagramu, kterou je část osy c a má tvar

$$x = \psi_1(c) = 0, \quad c \in U_c(0). \quad (3.31)$$



Obrázek 48: Čtyři možné diagramy pro vidlovou bifurkaci (v závislosti na znaménkách parciálních derivací v (3.6)).

Rovnici $F(c, x) = 0$ vyšetřujeme stejně jako v důkazu věty 3.4 a dostaneme druhou větev diagramu ve tvaru oblouku, jehož rovnice má tvar

$$c = \psi_2(x), \quad x \in U_x(0). \quad (3.32)$$

2. Vyšetříme stabilitu kritických bodů určených větvemi (3.31) a (3.32). Na rozdíl od důkazu věty 3.4 nyní budeme aplikovat větu 2.3 na rovnici (3.30). Proto budeme na studované větvi vyšetřovat znaménko parciální derivace funkce $x F(c, x)$ podle x . Tato parciální derivace má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}(x F(c, x)) = F(c, x) + x \frac{\partial F}{\partial x}(c, x). \quad (3.33)$$

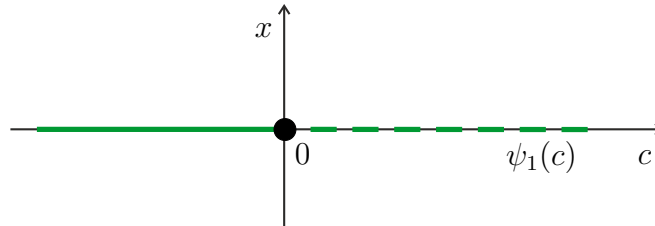
- Předpokládejme stejně jako v důkazu věty 3.4, že platí (3.12) a vyšetřeme nejprve větev (3.31). Dosazením do (3.33) máme

$$F(c, \psi_1(c)) + \psi_1(c) \frac{\partial F}{\partial x}(c, \psi_1(c)) = F(c, 0) \quad \text{pro } c \in U_c(0).$$

Protože $\frac{\partial F}{\partial c}(0, 0) > 0$ (viz (3.12)), je funkce $F(c, 0)$ v okolí $U_c(0)$ rostoucí. Jelikož $F(0, 0) = 0$, dostáváme

$$F(c, 0) < 0, \quad \text{je-li } c < 0 \quad \text{a} \quad F(c, 0) > 0, \quad \text{je-li } c > 0.$$

Podle věty 2.3 můžeme proto usoudit, že kritické body na záporné části osy c jsou asymptoticky stabilní a kritické body na kladné části osy c jsou nestabilní (viz obrázek 49).



Obrázek 49: Kritické body na záporné části osy c jsou asymptoticky stabilní, zatímco na kladné jsou nestabilní.

- Nyní za předpokladu (3.12) vyšetříme větev (3.32). Dosazením do (3.33) máme

$$F(\psi_2(x), x) + x \frac{\partial F}{\partial x}(\psi_2(x), x) = x \frac{\partial F}{\partial x}(\psi_2(x), x), \quad (3.34)$$

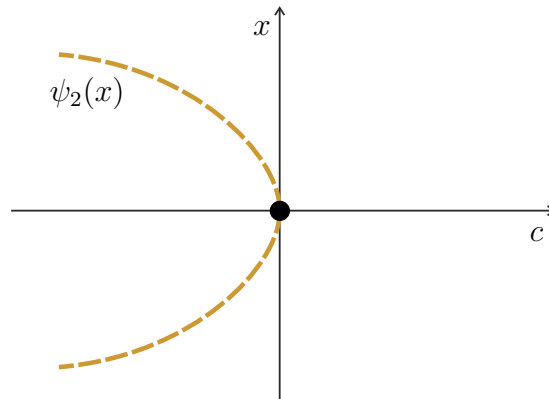
protože funkce $\psi_2(x)$ splňuje (3.8). Nyní stejným postupem jako v důkazu věty 3.4 odvodíme pro funkci $\psi_2(x)$ vzorec (3.9) a nerovnosti (3.14) a (3.15), z nichž můžeme usoudit, že platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\psi_2(x), x) < 0, \quad \text{je-li } x < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\psi_2(x), x) > 0, \quad \text{je-li } x > 0.$$

Odsud podle (3.33) a (3.34) vyplývá nerovnost

$$\frac{\partial}{\partial x}(xF(\psi_2(x), x)) > 0 \quad \text{pro každé } x \in U_x(0), x \neq 0.$$

Na základě věty 2.3 proto dostáváme, že kritické body rovnice (3.30) určené větví (3.32) jsou nestabilní (viz obrázek 50).



Obrázek 50: Kritické body rovnice (3.30) určené větví (3.32) jsou nestabilní.

Bifurkační diagram má tedy za předpokladu (3.12) tvar Diagramu 12 na obrázku 48. Pro $c < 0$ má rovnice (3.30) nulový asymptoticky stabilní kritický bod a dva nestabilní kritické body — jeden kladný a druhý záporný. Pro $c > 0$ má rovnice jeden nulový nestabilní kritický bod.

Analogicky postupujeme při odvození Diagramů 13–15. □

Příklad 3.12 Následující čtyři diferenciální rovnice jsou nejjednodušší příklady rovnic s vidlovou bifurkací.

$$x'(t) = x^3(t) + cx(t), \quad (3.35)$$

$$x'(t) = -x^3(t) - cx(t), \quad (3.36)$$

$$x'(t) = x^3(t) - cx(t), \quad (3.37)$$

$$x'(t) = -x^3(t) + cx(t). \quad (3.38)$$

Funkce $F(c, x)$ v rovnici (3.35) má tvar $F(c, x) = x^2 + c$. V příkladu 3.6 jsme ukázali, že funkce F splňuje podmínky (3.4) a (3.6), a tedy podle věty 3.10 má rovnice (3.35) v bodě $(0, 0)$ vidlovou bifurkaci. Větve bifurkačního diagramu určíme z rovnice

$$x(x^2 + c) = 0.$$

Dostáváme větev $x = \psi_1(c) = 0$ pro $c \in \mathbb{R}$ a větev $c = -x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Dále vidíme, že $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$ a $\frac{\partial F}{\partial c} = 1$, tedy F splňuje (3.12). Proto má rovnice (3.35) Diagram 12 na obrázku 48.

Podobně lze vyšetřit rovnice (3.36)–(3.38). Zjistíme, že rovnici (3.36) odpovídá Diagram 13, rovnici (3.37) Diagram 14 a rovnici (3.38) Diagram 15 na obrázku 48.

Poznámka 3.13 (O hysterezi) V reálných modelech se rovněž vyskytuje jev zvaný *hystereze*. Ukážeme jej na příkladu rovnice

$$x'(t) = c + x(t) - x^3(t), \quad (3.39)$$

v níž vystupuje reálný parametr c . Funkce F v této rovnici má tvar

$$F(c, x) = c + x - x^3.$$

Vidíme, že F splňuje (3.5), protože $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) = 1 - 3x^2$.

Tedy pro $c = 0$ má rovnice (3.39) kritický bod $x = 0$, ale tento bod je hyperbolický, a proto v něm bifurkace nenastává. Vyšetříme proto ostatní kritické body rovnice (3.39), které dostáváme z rovnice

$$c + x - x^3 = 0.$$

Odsud lze snadno vyjádřit c jako funkci x :

$$c = \psi(x) = x^3 - x.$$

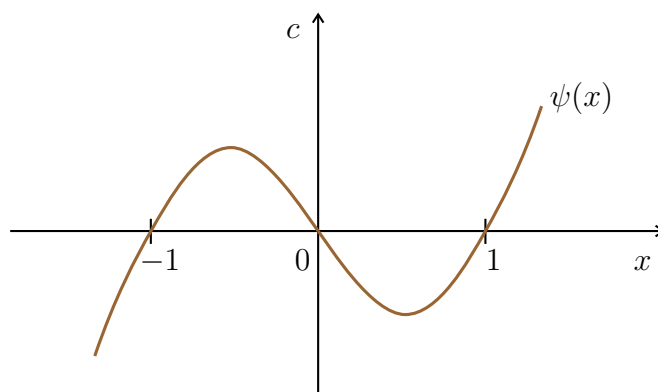
Vykreslíme graf funkce $\psi(x)$ (na obrázku 51) a po přetočení os dostáváme bifurkační diagram rovnice (3.39) (na obrázku 52).

Na bifurkační křivce $c = x^3 - x$ jsou vyznačeny body $A = (-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $B = (\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, při jejichž přechodu se mění stabilita odpovídajících kritických bodů x . Tuto stabilitu určíme pomocí věty 2.3 ze znaménka funkce $\frac{\partial F}{\partial x}(c, x)$ v bodech bifurkační křivky. Platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) = 1 - 3x^2 > 0, \quad \text{pokud } x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

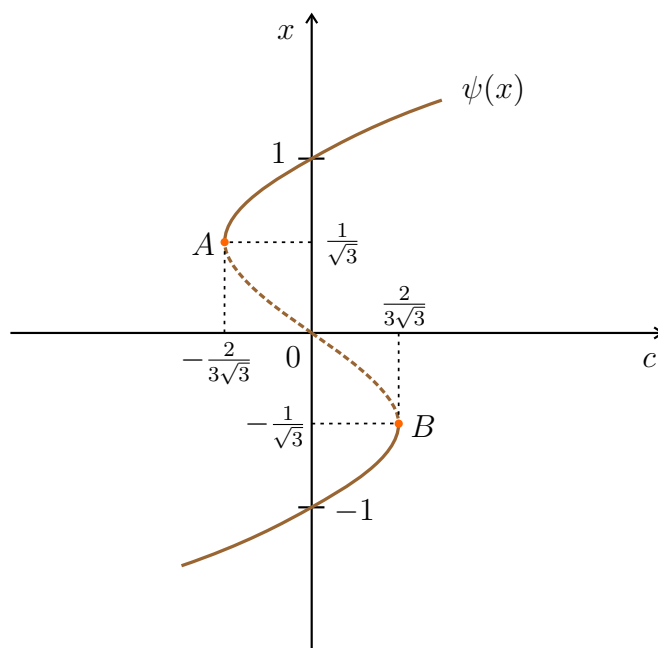
a podobně

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c, x) < 0, \quad \text{pokud } x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{nebo} \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Obrázek 51: Graf funkce $\psi(x) = x^3 - x$.

Diagram 16



Obrázek 52: Bifurkační diagram rovnice (3.39). V bodech $A = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a $B = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ dochází k sedlové bifurkaci.

V bodech A, B platí $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = \frac{\partial F}{\partial x}(B) = 0$. To znamená, že hodnoty $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ a $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ jsou bifurkační hodnoty rovnice (3.39). V Diagramu 16 vidíme, že rovnice (3.39) má v bodech A a B sedlovou bifurkaci.

Z Diagramu 16 dostáváme následující informace o změnách fázového portréту rovnice (3.39):

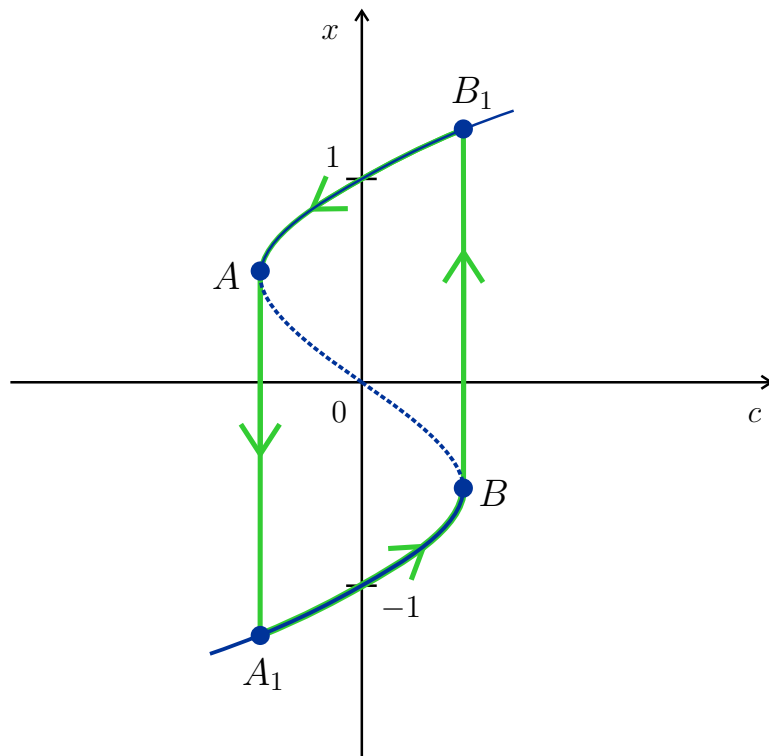
- (i) je-li $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, má rovnice (3.39) jediný záporný asymptoticky stabilní kritický bod;
- (ii) je-li $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, má rovnice (3.39) jeden záporný asymptoticky stabilní kritický bod a dále nehyperbolický kritický bod $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Z fázového portréту rovnice (3.39) lze určit, že tento kritický bod je nestabilní;
- (iii) je-li $c \in (-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$, má rovnice (3.39) dva asymptoticky stabilní kritické body a jeden nestabilní kritický bod;
- (iv) je-li $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, má rovnice (3.39) jeden kladný asymptoticky stabilní kritický bod a dále nehyperbolický kritický bod $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Z fázového portréту rovnice (3.39) dostaneme, že bod $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ je nestabilní;
- (v) je-li $c > \frac{2}{3\sqrt{3}}$, má rovnice (3.39) jediný kladný asymptoticky stabilní kritický bod.

Fázové portréty rovnice (3.39) byly pro různé hodnoty parametru určeny v příkladě 2.7.

Vzhledem k častému výskytu Diagramu 16 v aplikacích, vysvětlíme podrobněji chování reálného systému, jehož matematickým modelem je rovnice (3.39).

Začneme s pozorováním systému pro velkou (v absolutní hodnotě) zápornou hodnotu parametru c . S rostoucím časem t se systém postupně dostane do stavu rovnováhy (ekvilibria). Tento rovnovážný stav je určen asymptoticky stabilním kritickým bodem x , který k danému c určíme z grafu křivky $c = x^3 - x$. Nyní zvětšujeme c a systém se vždy po nějaké době ustálí v odpovídajícím asymptoticky stabilním ekvilibriu x . Takové chování systému nastává, dokud je $c < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Jakmile je $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, je nejbližší ekvilíbrio dané x -ovou souřadnicí bodu B , jedná se tedy o NKB $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tento kritický bod je nestabilní, a proto se reálný systém neustálí po nějakém čase v tomto bodě $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ale provede *skok* do nejbližšího asymptoticky stabilního ekvilibria příslušného k hodnotě parametru $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Tímto stabilním ekvilibriem je x -ová souřadnice bodu B_1 na obrázku 53.

Podobný skok reálného systému z bodu A do bodu A_1 nastane, pokud zmenšujeme c z velkých kladných hodnot až k hodnotě $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Tomuto jevu se říká *hystereze* a uzavřená křivka A_1BB_1A se nazývá *hysterezní smyčka*.



Obrázek 53: Hysterezní smyčka.

S dalšími typy lokálních bifurkací se zájemce může seznámit například v knihách [1]–[4], [6]–[8].

Část III

Planární dynamické systémy

4 Soustava dvou lineárních homogenních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty



Cílem této kapitoly je naučit se řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ jsou daná reálná čísla.

Soustavu (4.1) lze ekvivalentně zapsat pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ve tvaru vektorové rovnice

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t). \quad (4.2)$$

- Než přistoupíme k popisu metody řešení rovnice (4.2), ukážeme, jak tato rovnice souvisí s obecnými pojmy definovanými v kapitole 1.

Položíme-li v definicích a větách kapitoly 1 dimenzi n rovnu 2, dostáváme dynamické systémy v dvourozměrném fázovém prostoru \mathbb{R}^2 , které nazýváme *planární dynamické systémy*. Tyto planární dynamické systémy vznikají ze soustavy dvou autonomních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Rovnice (1.6) má totiž pro $n = 2$ tvar

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (4.3)$$

kde $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorová funkce dvou proměnných x_1, x_2 , $\mathbf{f} \in C^1(G)$ a $G \subset \mathbb{R}^2$. V souladu s definicí 1.7 pak *řešením rovnice* (4.3) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ takovou, že $\mathbf{x} \in C^1(J)$ splňuje rovnici (4.3) pro každé $t \in J$. Předpokládáme, že $0 \in J$. Počáteční podmínka (1.8) má nyní tvar

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (4.4)$$

kde $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in G$. Rovnici (4.3) lze ekvivalentně zapsat ve tvaru soustavy

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (4.5)$$

pokud položíme $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$. Podobně počáteční podmínku (4.4) lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (4.6)$$

Řešení počáteční úlohy (4.3), (4.4) na intervalu J budeme značit $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$. Podle definice 1.7 a podmínky (4.4) je to vektorová funkce splňující

$$\varphi'(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) \quad \text{pro každé } t \in J, \quad (4.7)$$

$$\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0. \quad (4.8)$$

- Ve druhé kapitole jsme viděli, že pro určení fázového portréту skalární rovnice (2.1) stačí znát nulové body funkce f a znaménka této funkce mezi nimi. Tímto způsobem lze najít fázový portrét libovolné rovnice (2.1).
- V případě vektorové rovnice (4.3) je situace mnohem složitější a z grafů funkcí f_1, f_2 nelze takto jednoduše odvodit fázový portrét. Neexistuje totiž univerzální metoda, pomocí níž bychom mohli určit fázový portrét libovolné rovnice (4.3). Pro speciální případy rovnic (4.3) však existují dílčí metody, pomocí nichž můžeme u takové rovnice najít fázový portrét, nebo aspoň některé části fázového portrétu.
- Rovnice (4.2) je důležitým speciálním případem rovnice (4.3), v níž je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},$$

což znamená, že

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

tedy soustava (4.1) je speciálním případem soustavy (4.5).

Významnou vlastností rovnice (4.2) je skutečnost, že pro libovolnou matici \mathbf{A} lze najít všechna řešení této rovnice. To nám umožní pro libovolnou matici \mathbf{A} určit odpovídající fázový portrét rovnice (4.2). Postup při hledání řešení rovnice je založen na následující větě.

Věta 4.1 (O globální existenci a jednoznačnosti) *Počáteční úloha (4.2), (4.4) má pro libovolné $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ jediné řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ definované na celém \mathbb{R} . Toto řešení je tvaru*

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{At} \cdot \mathbf{x}^0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

přičemž e^{At} je maticová funkce daná následující řadou

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Důkaz. Mocninná řada (4.10) má poloměr konvergence ∞ , a proto stejnoměrně konverguje na každém intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Maticová funkce e^{At} je proto definovaná pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Ukažme, že tato funkce splňuje maticovou rovnici

$$(e^{At})' = \mathbf{A}e^{At}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{At} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A} \cdot t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 \cdot t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n \cdot t^n}{n!} + \cdots, \quad (4.11)$$

přičemž, vzhledem ke stejnoměrné konvergenci, lze tuto řadu derivovat člen po členu, tedy

$$\begin{aligned} (e^{At})' &= \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^3 \cdot t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \\ &= \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A} \cdot t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{n-1} \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \right) = \mathbf{A} \cdot e^{At}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proto

$$\varphi'(t, \mathbf{x}^0) = (e^{At} \cdot \mathbf{x}^0)' = \mathbf{A} \cdot e^{At} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{A} \cdot \varphi(t, \mathbf{x}^0), \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ splňuje rovnici (4.2) pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Dále je vzhledem k (4.11)

$$\varphi(0, \mathbf{x}^0) = e^{A \cdot 0} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0.$$

Vidíme, že φ splňuje (4.4). Jelikož rovnice (4.2) je speciálním případem rovnice (4.3), v níž je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, a protože zde je $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, dostáváme jednoznačnost řešení úlohy (4.2), (4.4) z věty 1.10 pro $n = 2$ a $G = \mathbb{R}^2$. \square

Poznámka 4.2 Všimněme si, že na rozdíl od věty 1.10, věta 4.1 zaručuje pro libovolný počáteční bod $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existenci a jednoznačnost řešení úlohy (4.2), (4.4) na celém \mathbb{R} . V takovém případě hovoříme o globální existenci a jednoznačnosti.

Při použití vzorce (4.9) z věty 4.1 nastává problém v tom, že maticovou funkci e^{At} neumíme přímo určit z matice \mathbf{A} . Proto užíváme teorii Jordanových kanonických tvarů, na níž je založena následující metoda pro nalezení řešení úlohy (4.2), (4.4).

Metoda řešení úlohy (4.2), (4.4):

1. K matici \mathbf{A} určíme její Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} .
2. Nalezneme regulární transformační matici \mathbf{P} z rovnice

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}.$$

3. Určíme tvar matice $e^{\mathbf{J}t}$.

4. Určíme tvar řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0 = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0$.

Uveďme nyní podrobněji postup v jednotlivých krocích této metody.

Krok 1.

K matici \mathbf{A} najdeme její vlastní čísla z charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \quad \text{tj.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou λ :

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Označme koeficienty v rovnici pomocí symbolů pro stopu matice a determinant

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}, \quad \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Potom má kvadratická rovnice tvar

$$\lambda^2 - \text{tr } \mathbf{A} \cdot \lambda + \det \mathbf{A} = 0$$

a vlastní čísla λ_1 a λ_2 určíme ze vzorce

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}. \quad (4.12)$$

V závislosti na tom, zda jsou vlastní čísla reálná různá, komplexně sdružená, nebo reálná stejná, existují následující Jordanovy kanonické tvary:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{J} je k matici \mathbf{A} určena jednoznačně až na pořadí čísel λ_1, λ_2 na hlavní diagonále.

(ii) $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{J} je k matici \mathbf{A} určena jednoznačně až na pořadí čísel β a $-\beta$ na vedlejší diagonále.

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2$, tj. obě vlastní čísla jsou stejná a tedy reálná. Není-li matice \mathbf{A} diagonální, potom

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Je-li \mathbf{A} diagonální, potom platí $\mathbf{A} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Ve všech případech (i), (ii), (iii) má matice \mathbf{J} stejná vlastní čísla jako matice \mathbf{A} .

Krok 2.

Regulární transformační matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

určíme z maticové rovnice $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$. Protože hledáme regulární matici \mathbf{P} , musí být sloupce $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ nenulové a lineárně nezávislé. Ukažme, jak tyto sloupce určujeme a jaký mají význam v jednotlivých případech (i), (ii), (iii).

(i) Maticová rovnice $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ má tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Odtud pro první sloupec $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ matice \mathbf{P} dostáváme soustavu

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda_1 p_1, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda_1 p_2, \end{cases} \quad (4.13)$$

tedy $\mathbf{Ap} = \lambda_1 \mathbf{p}$, což znamená, že sloupec \mathbf{p} je vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k vlastnímu číslu λ_1 .

Rovnice v (4.13) jsou lineárně závislé. Soustavu (4.13) proto řešíme tak, že buď zvolíme nenulovou hodnotu p_1 a vypočítáme p_2 , nebo zvolíme nenulovou hodnotu p_2 a vypočítáme p_1 . Odsud plyne, že vektor \mathbf{p} je určen jednoznačně až na násobek reálným číslem.

Podobně pro druhý sloupec $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ dostáváme soustavu

$$\begin{cases} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 = \lambda_2 r_1, \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 = \lambda_2 r_2, \end{cases} \quad (4.14)$$

kteřou řešíme stejným způsobem jako soustavu (4.13). Protože soustavu (4.14) lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A}\mathbf{r} = \lambda_2\mathbf{r}$, je vektor \mathbf{r} vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k vlastnímu číslu λ_2 . Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, jsou vektory \mathbf{p} a \mathbf{r} lineárně nezávislé.

(ii) Maticová rovnice $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$ má tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Odtud pro první sloupec $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ matice \mathbf{P} dostáváme soustavu

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \alpha p_1 + \beta r_1, & a_{11}r_1 + a_{12}r_2 = -\beta p_1 + \alpha r_1, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \alpha p_2 + \beta r_2, & a_{21}r_1 + a_{22}r_2 = -\beta p_2 + \alpha r_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Tuto soustavu řešíme tak, že za jednu souřadnici vektoru \mathbf{p} a za jednu souřadnici vektoru \mathbf{r} dosadíme nějaká zvolená čísla a zbývající souřadnice ze soustavy (4.15) dopočítáme. Například zvolíme hodnoty pro p_1 a r_1 a dopočítáme p_2 a r_2 . Aby matice \mathbf{P} byla regulární, nesmí být obě zvolené hodnoty pro p_1 a r_1 současně rovny 0. Matice \mathbf{P} není soustavou (4.15) určena jednoznačně. Její sloupce v tomto případě nejsou vlastní vektory matice \mathbf{A} . Platí totiž, že má-li \mathbf{A} komplexně sdružená vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, nemá \mathbf{A} reálné vlastní vektory.

(iii) Není-li \mathbf{A} diagonální, má maticová rovnice $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$ tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Odtud pro sloupec $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ matice \mathbf{P} dostáváme soustavu (4.13). Tedy \mathbf{p} je vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k vlastnímu číslu λ_1 . Pro druhý sloupec \mathbf{r} řešíme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 &= p_1 + \lambda_1 r_1, \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 &= p_2 + \lambda_1 r_2, \end{aligned}$$

tedy

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda_1\mathbf{r},$$

což znamená, že \mathbf{r} není vlastním vektorem matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{A} má proto v tomto případě jediný (až na násobek) vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_1 .

Je-li matice \mathbf{A} diagonální, pak $\mathbf{A} = \mathbf{J}$ a maticová rovnice má tvar $\mathbf{J}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$, tj.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme-li dva libovolné lineárně nezávislé vektory \mathbf{p} a \mathbf{r} , budou splňovat tuto rovnici a budou vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1 . Rovněž jejich libovolná lineární kombinace bude vlastním vektorem příslušným k λ_1 . V tomto případě je tedy každý dvourozměrný vektor vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k λ_1 .

Krok 3.

K určení tvaru maticové funkce $e^{\mathbf{J}t}$ musíme opět rozlišit případy (i), (ii) a (iii).

(i) Je-li $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, potom $e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

(ii) Je-li $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, potom

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & -e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

(iii) Je-li $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, potom $e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$.

Je-li $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, potom $e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$.

Krok 4.

Dokážeme, že řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{At} \mathbf{x}^0$ lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0,$$

kde \mathbf{J} je Jordanův kanonický tvar matice \mathbf{A} a \mathbf{P} je regulární matice transformující \mathbf{J} na \mathbf{A} vzorcem

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}.$$

- Necht' $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je řešení úlohy (4.2), (4.4). Zaved' me v rovnici (4.2) substituci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t).$$

Potom je

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\mathbf{y}(t),$$

a proto platí

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t),$$

tedy rovnice (4.2) se transformuje na rovnici

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t). \quad (4.16)$$

Položme

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0 \quad (4.17)$$

a uvažujme počáteční podmínku

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0. \quad (4.18)$$

Podle věty 4.1 má úloha (4.16), (4.18) jediné řešení definované na \mathbb{R} .

Označme toto řešení $\psi(t, \mathbf{y}^0)$. Užijeme-li vzorec (4.9), v němž místo matice \mathbf{A} bude kanonická matice \mathbf{J} a místo počátečního bodu \mathbf{x}^0 bod \mathbf{y}^0 , dostaneme řešení $\psi(t, \mathbf{y}^0)$ úlohy (4.16), (4.18) ve tvaru

$$\psi(t, \mathbf{y}^0) = e^{Jt}\mathbf{y}^0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Protože substituce $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$ převádí úlohu (4.2), (4.4) na úlohu (4.16), (4.18), platí pro řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a $\psi(t, \mathbf{y}^0)$ vztah

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{P} \cdot \psi(t, \mathbf{y}^0). \quad (4.20)$$

Dosadíme-li do (4.20) vzorce (4.19) a (4.17), máme požadovanou rovnost

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{y}^0 = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0.$$

Příklad 4.3 Uvažujme soustavu

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) = 3x_2(t), \end{cases} \quad (4.21)$$

a počáteční podmínku

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1. \quad (4.22)$$

Vektorový ekvivalentní zápis úlohy (4.21), (4.22) je $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1)^T.$$

1. K matici \mathbf{A} najdeme její Jordanův kanonický tvar pomocí její stopy $\text{tr } \mathbf{A} = 4$ a determinantu $\det \mathbf{A} = 3$.

Ze vzorce (4.12) určíme vlastní čísla λ_1 a λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}.$$

Odtud $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ a Jordanův kanonický tvar je matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Maticovou rovnici $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$ pro určení transformační matice \mathbf{P} lze zde zapsat následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy pro vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ řešíme soustavu

$$\begin{aligned} p_1 - 2p_2 &= 3p_1, \\ 3p_2 &= 3p_2. \end{aligned}$$

Zvolíme-li například $p_1 = 1$, spočítáme $p_2 = -1$. Nyní pro vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ řešíme soustavu

$$\begin{aligned} r_1 - 2r_2 &= r_1, \\ 3r_2 &= r_2. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne $r_2 = 0$. Máme tedy volbu pouze pro r_1 . Zvolíme-li například $r_1 = 1$, dostáváme transformační matici \mathbf{P} , kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Spočítali jsme $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, jde tedy o případ (i) a

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

4. Řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (4.21), (4.22) dostáváme jako součin matic

$$\mathbf{P}, e^{\mathbf{J}t}, \mathbf{P}^{-1}$$

a počátečního bodu \mathbf{x}^0 .

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}^0) &= \varphi(t, (2, 1)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t - e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Složky $x_1(t)$ a $x_2(t)$ vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jsou skalární funkce

$$x_1(t) = 3e^t - e^{3t}, \quad x_2(t) = e^{3t}.$$

Ověřme, že funkce

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (3e^t - e^{3t}, e^{3t})^T$$

je řešením úlohy (4.21), (4.22). Dosadíme složky funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ do soustavy (4.21). Na levé straně soustavy (4.21) máme

$$x_1'(t) = 3e^t - 3e^{3t}, \quad x_2'(t) = 3e^{3t}.$$

Na pravé straně soustavy je

$$x_1(t) - 2x_2(t) = 3e^t - e^{3t} - 2e^{3t} = 3e^t - 3e^{3t}, \quad 3x_2(t) = 3e^{3t}.$$

Vidíme, že soustava (4.21) je splněna pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Kromě toho je

$$x_1(0) = 3e^0 - e^0 = 2, \quad x_2(0) = e^0 = 1.$$

Proto platí (4.22).

Příklad 4.4 Uvažujme soustavu

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) = 10x_1(t) + 5x_2(t), \end{cases} \quad (4.23)$$

a počáteční podmínku

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -3. \quad (4.24)$$

1. K matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ najdeme její Jordanův kanonický tvar.

Určíme stopu matice \mathbf{A} : $\text{tr } \mathbf{A} = -1 + 5 = 4$, determinant matice \mathbf{A} :
 $\det \mathbf{A} = -5 + 10 = 5$.

Ze vzorce (4.12) spočítáme vlastní čísla matice \mathbf{A}

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i.$$

Tedy máme případ (ii) a Jordanův kanonický tvar je matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Maticová rovnice $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ pro určení transformační matice \mathbf{P} má zde tvar

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

čili řešíme soustavu

$$\begin{aligned} -p_1 - p_2 &= 2p_1 + r_1, & -r_1 - r_2 &= -p_1 + 2r_1, \\ 10p_1 + 5p_2 &= 2p_2 + r_2, & 10r_1 + 5r_2 &= -p_2 + 2r_2. \end{aligned}$$

Zvolme například $p_1 = 0$ a $r_1 = -1$. Potom z první rovnice hned dostáváme $p_2 = 1$ a z druhé plyne $r_2 = 3$. Proto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. V případě (ii) má matice $e^{\mathbf{J}t}$ tvar

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

4. Řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (4.23), (4.24) dostaneme jako součin

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0, \quad \text{kde } \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (1, -3)^T.$$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}^0) &= \varphi(t, (1, -3)^T) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t + 3\sin t & -\sin t + 3\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin t + \cos t & -\sin t \\ 10\sin t & \cos t + 3\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - 3\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Složky $x_1(t)$ a $x_2(t)$ vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jsou zde funkce

$$x_1(t) = e^{2t} \cos t \quad \text{a} \quad x_2(t) = e^{2t}(\sin t - 3\cos t).$$

Ověřme, že funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (e^{2t} \cos t, e^{2t}(\sin t - 3\cos t))^T$ je řešením úlohy (4.23), (4.24). Dosadíme $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ do soustavy (4.23). Na levé straně soustavy (4.23) je

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t, \\ x_2'(t) &= 2e^{2t}(\sin t - 3\cos t) + e^{2t}(\cos t + 3\sin t) = 5e^{2t}(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

Dále na pravé straně soustavy je

$$\begin{aligned} -x_1(t) - x_2(t) &= -e^{2t}(\cos t + \sin t - 3\cos t) = e^{2t}(2\cos t - \sin t), \\ 10x_1(t) + 5x_2(t) &= 10e^{2t} \cos t + 5e^{2t}(\sin t - 3\cos t) = 5e^{2t}(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

Vidíme, že soustava (4.23) je splněna pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Kromě toho je

$$x_1(0) = e^0 \cos 0 = 1, \quad x_2(0) = e^0(\sin 0 - 3\cos 0) = -3.$$

Tedy platí i (4.24).

Příklad 4.5 Uvažujme soustavu

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + 4x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t), \end{cases} \quad (4.25)$$

a počáteční podmínku

$$x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0. \quad (4.26)$$

1. K matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ najdeme její Jordanův kanonický tvar pomocí její stopy $\text{tr } \mathbf{A} = -4$ a determinantu $\det \mathbf{A} = 4$. Ze vzorce (4.12) určíme vlastní čísla λ_1 a λ_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2.$$

Jordanův kanonický tvar je matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Maticová rovnice $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$ pro určení transformační matice \mathbf{P} zde vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ řešíme soustavu

$$\begin{aligned} -4p_1 + 4p_2 &= -2p_1, \\ -p_1 &= -2p_2. \end{aligned}$$

Zvolme například $p_1 = 2$. Potom $p_2 = 1$.

Pro vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ řešíme soustavu

$$\begin{aligned} -4r_1 + 4r_2 &= p_1 - 2r_2 = 2 - 2r_2, \\ -r_1 &= p_2 - 2r_2 = 1 - 2r_2. \end{aligned}$$

Zvolme například $r_2 = 0$. Potom $r_1 = -1$ a dostáváme transformační matici \mathbf{P} , kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Jelikož $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ a matice \mathbf{A} není diagonální, máme případ (iii). Proto

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (4.25), (4.26) dostaneme jako součin

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0, \quad \text{kde } \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (5, 0)^T.$$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}^0) &= \varphi(t, (5, 0)^T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & 2t - 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & 4t \\ -t & 1 + 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 5 - 10t \\ -5t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Složky $x_1(t)$ a $x_2(t)$ vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jsou zde skalární funkce

$$x_1(t) = e^{-2t}(5 - 10t) \quad \text{a} \quad x_2(t) = -5te^{-2t}.$$

Ověřme, že funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (e^{-2t}(5 - 10t), -5te^{-2t})^T$ je řešením úlohy (4.25), (4.26). Dosadíme složky funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ do soustavy (4.25). Na levé straně soustavy máme

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2e^{-2t}(5 - 10t) + e^{-2t}(-10) = 20e^{-2t}(t - 1), \\ x_2'(t) &= -5e^{-2t} + 10te^{-2t} = 5e^{-2t}(2t - 1). \end{aligned}$$

Na pravé straně soustavy je

$$\begin{aligned} -4x_1(t) + 4x_2(t) &= -4e^{-2t}(5 - 10t) - 20te^{-2t} = 20e^{-2t}(t - 1), \\ -x_1(t) &= -e^{-2t}(5 - 10t) = 5e^{-2t}(2t - 1). \end{aligned}$$

Vidíme, že soustava (4.23) je splněna pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Dále je

$$x_1(0) = e^0(5 - 0) = 5, \quad x_2(0) = -5 \cdot 0 \cdot e^0 = 0,$$

což značí, že platí (4.26).

5 Planární lineární dynamické systémy s konstantní maticí \mathbf{J} v kanonickém tvaru



Cílem této kapitoly je naučit se určovat fázový portrét vektorové rovnice

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(t), \quad (5.1)$$

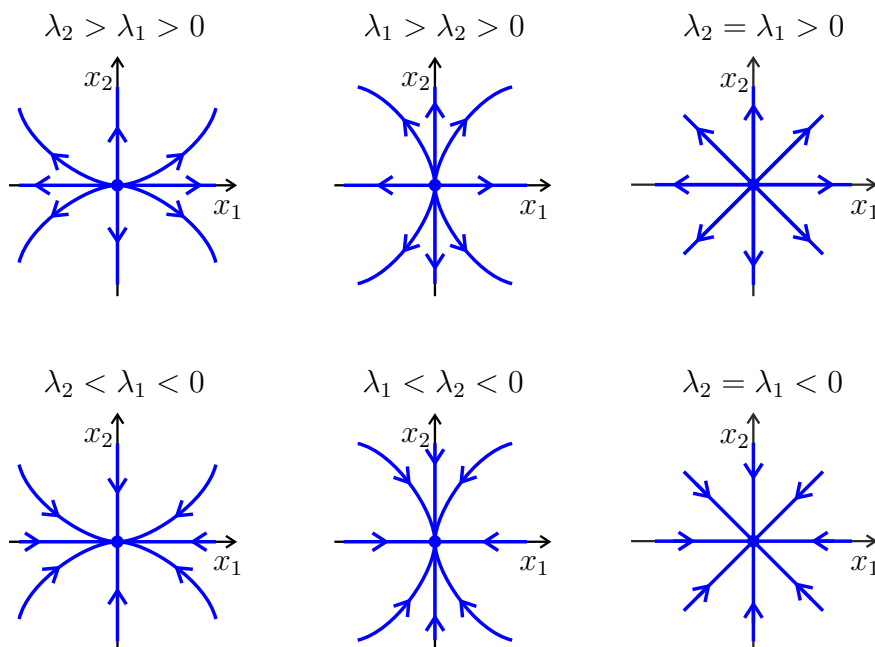
pro libovolnou dvourozměrnou konstantní matici \mathbf{J} v Jordanově kanonickém tvaru.

Podle věty 1.13 tato rovnice generuje planární dynamický systém. Fázový portrét rovnice (5.1) respektive odpovídajícího dynamického systému lze jednoduše určit z hodnot vlastních čísel λ_1 a λ_2 matice \mathbf{J} pomocí následujících vět. Prostor \mathbb{R}^2 budeme v souladu s definicí 1.20 nazývat fázovou rovinou. Body z \mathbb{R}^2 budeme podle potřeby psát ve tvaru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nebo (x_1, x_2) a symbol T vynecháme.

Věta 5.1 *Nechť \mathbf{J} je diagonální matice s reálnými vlastními čísly λ_1, λ_2 , která splňuje podmínku*

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0. \quad (5.2)$$

Potom rovnice (5.1) má jeden z šesti fázových portrétů na obrázku 54.



Obrázek 54: Fázové portréty rovnice (5.1).

Důkaz. Matice \mathbf{J} má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

a tedy rovnici (5.1) lze ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t), \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Podle věty 4.1 pro libovolný bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ existuje jediné řešení soustavy (5.3) splňující podmínku (4.6).

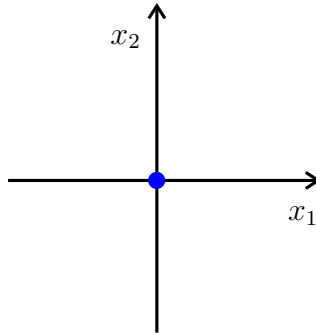
Toto řešení má tvar

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{J}t} \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ x_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ jsou určeny složkami vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a mají tvar

$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = x_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

1. Zvolme $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$. Pak dostáváme z (5.4) kritický bod $(0, 0)$, jehož orbita je jednobodová (viz obrázek 55).



Obrázek 55: Kritický bod v počátku.

2. Zvolme \mathbf{x}^0 na kladné poloose x_1 , tj. $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, 0)$, $x_1^0 > 0$. Z (5.4) dostaneme dosazením tohoto bodu parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$

$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

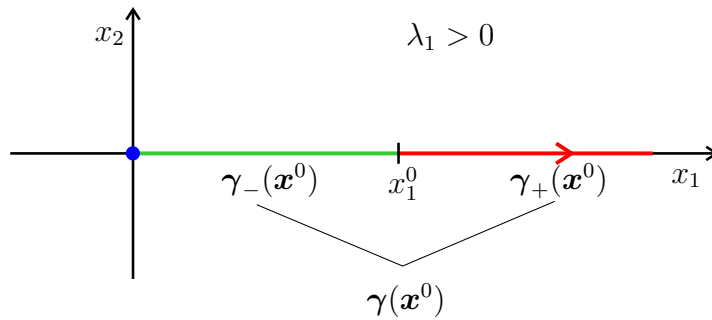
Kladná (červená) část orbity $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$ na obrázku 56 a obrázku 57 je tvořena body $(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, 0)$ pro $t \in [0, \infty)$, záporná (zelená) část orbity $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$ je tvořena body $(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, 0)$ pro $t \in (-\infty, 0]$. Šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ určuje směr pohybu bodu $(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, 0)$ po orbitě pro rostoucí t . Nyní rozlišíme dva případy, podle znaménka vlastního čísla λ_1 .

(a) *Nechť* $\lambda_1 > 0$. Potom

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1^0 e^{\lambda_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1^0 e^{\lambda_1 t} = \infty.$$

Tedy $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$ je interval $(0, x_1^0]$ na ose x_1 , $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$ je interval $[x_1^0, \infty)$ na ose x_1 a $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je kladná část osy x_1 .

Z první rovnice v (5.3) vidíme, že pro $x_1(t) > 0$ je $x_1'(t) > 0$. Funkce $x_1(t)$ proto roste a šipka v každém bodě orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ směřuje doprava.



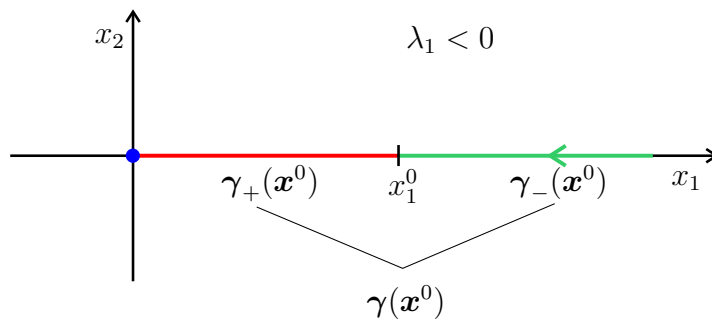
Obrázek 56: Orbitu $\gamma(\mathbf{x}^0)$ tvoří kladná poloosa x_1 . Pro $\lambda_1 > 0$ směřuje šipka doprava.

(b) *Nechť* $\lambda_1 < 0$. Potom

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1^0 e^{\lambda_1 t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1^0 e^{\lambda_1 t} = 0.$$

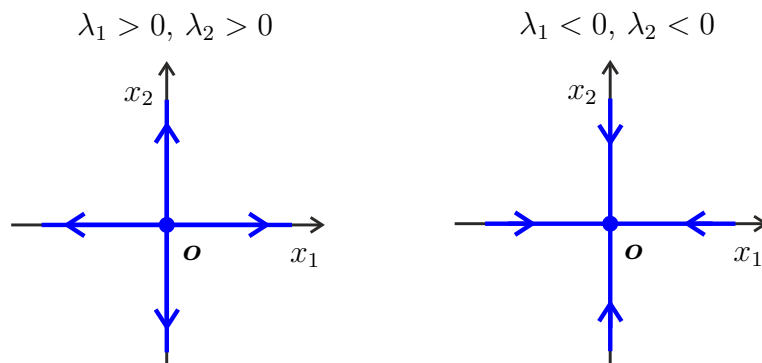
Proto $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$ je interval $[x_1^0, \infty)$ na ose x_1 , $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$ je interval $(0, x_1^0]$ na ose x_1 a $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je kladná část osy x_1 .

Z první rovnice v (5.3) vidíme, že pro $x_1(t) > 0$ je $x_1'(t) < 0$. Funkce $x_1(t)$ klesá a šipka v každém bodě orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ směřuje doleva.



Obrázek 57: Orbitu $\gamma(\mathbf{x}^0)$ tvoří kladná poloosa x_1 . Pro $\lambda_1 < 0$ směřuje šipka doleva.

Podobně odvodíme tvary dalších tří polopřímkových orbit, pokud volíme \mathbf{x}^0 na záporné poloose x_1 , nebo na kladné poloose x_2 , nebo na záporné poloose x_2 . Přitom z (5.2) plyne, že λ_1 a λ_2 mají stejné znaménko. Nastává proto jeden ze dvou případů na obrázku 58.



Obrázek 58: Orbity na osách ve dvou případech, kdy λ_1 a λ_2 mají stejné znaménko.

3. Nyní zvolme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ uvnitř prvního kvadrantu, tj. $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0$. Podle věty 4.1 se žádné dvě různé orbity nemohou dotýkat ani protínat. Proto orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ nemůže protnout ani se dotknout osy x_1 nebo osy x_2 , a tedy celá leží uvnitř prvního kvadrantu. Orbita je tvořena body $(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, x_2^0 e^{\lambda_2 t})$ pro $t \in \mathbb{R}$. Přitom pro $t \in (-\infty, 0]$ tvoří tyto body zápornou část orbity, $\gamma_-(\mathbf{x}^0)$, a pro $t \in [0, \infty)$ tvoří tyto body kladnou část orbity, $\gamma_+(\mathbf{x}^0)$.

Tvar křivky $\gamma(\mathbf{x}^0)$ nejlépe určíme, pokud z parametrických rovnice (5.4) vyloučíme parametr t . Platí

$$x_2 = x_2^0 (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = x_2^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (5.5)$$

Položme

$$k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad c = x_2^0 (x_1^0)^{-k}. \quad (5.6)$$

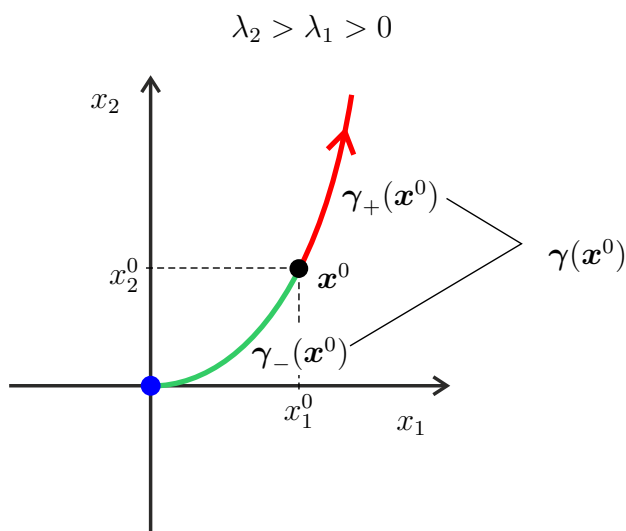
Pak má $\gamma(\mathbf{x}^0)$ rovnici

$$x_2 = c x_1^k, \quad x_1 \in (0, \infty). \quad (5.7)$$

Ze vzorců (5.6) vidíme, že konstanty c a k závisí na volbě bodu \mathbf{x}^0 a velikosti vlastních čísel λ_1 a λ_2 . Vzhledem k (5.2) je $k > 0$, a protože zde jsme volili $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0$, je také $c > 0$.

(a) Necht' $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Pak mohou nastat tři případy.

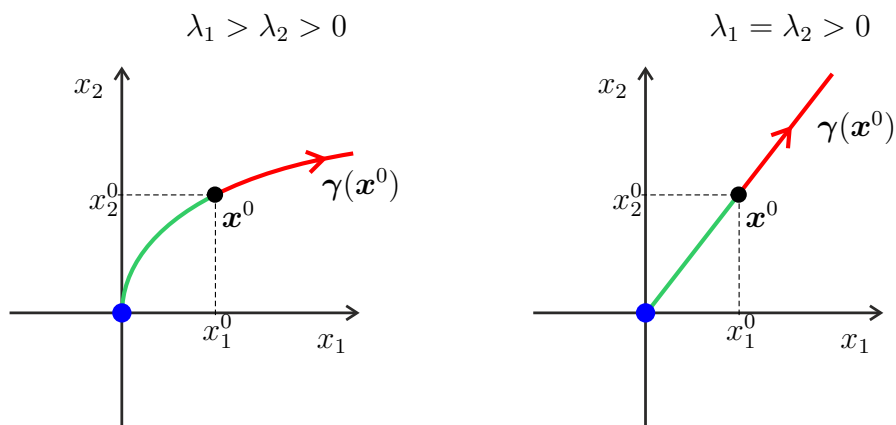
Bud' $\lambda_2 > \lambda_1$, tj. $k > 1$ a rovnice (5.7) určuje křivku vycházející z počátku a dotýkající se osy x_1 . Z rovnic (5.4) plyne, že obě složky řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jsou v tomto případě rostoucí a tedy šipka v každém bodě orbity směřuje nahoru a doprava (viz obrázek 59).



Obrázek 59: Šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří nahoru a doprava.

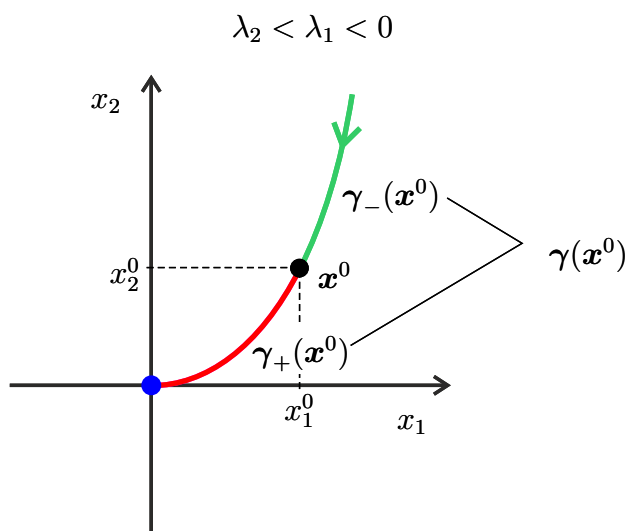
Další možnost je $\lambda_1 > \lambda_2$, tj. $k < 1$. Pak rovnice (5.7) určuje křivku vycházející z počátku a dotýkající se osy x_2 (viz obrázek 60).

Poslední možnost je $\lambda_1 = \lambda_2$, tj. $k = 1$. Rovnice (5.7) je v tomto případě rovnicí polopřímky vycházející z počátku. V obou případech šipka na orbitě směřuje vždy nahoru a doprava (viz obrázek 60).



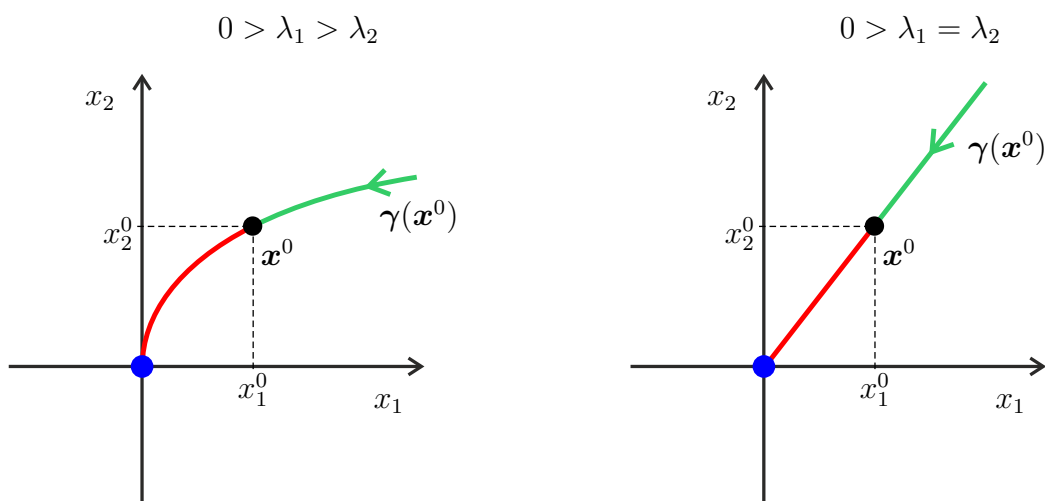
Obrázek 60: Šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří nahoru a doprava.

- (b) *Nechť* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Pak mohou nastat tři případy. Buď $\lambda_2 < \lambda_1$, tj. $k > 1$ a rovnice (5.7) určuje křivku vycházející z počátku a dotýkající se osy x_1 . Z rovnic (5.4) plyne, že obě složky řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ jsou klesající, a tedy šipka na orbitě směřuje vždy ke kritickému bodu \mathbf{o} (viz obrázek 61).



Obrázek 61: Šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří dolů a doleva.

Analogicky odvodíme orbity v případech $\lambda_1 > \lambda_2$ a $\lambda_1 = \lambda_2$ (viz obrázek 62).



Obrázek 62: Šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří dolů a doleva.

4. Pokud volíme bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ v jiném kvadrantu, postupujeme analogicky. Přitom, je-li $x_1^0 < 0$, je také $x_2 < 0$ a (5.5) lze ekvivalentně zapsat

$$x_2 = x_2^0 \left| \frac{x_1}{x_1^0} \right|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c |x_1|^k, \quad (5.8)$$

kde

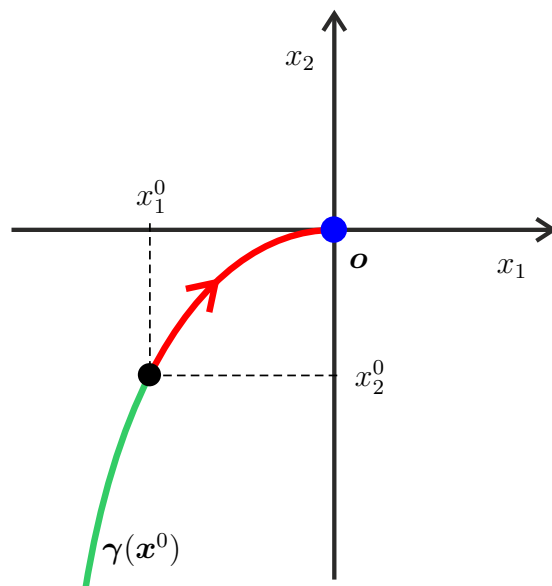
$$k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{a} \quad c = x_2^0 |x_1^0|^{-k}.$$

□

Poznámka 5.2 Z fázových portrétů ve větě 5.1 dostáváme informaci o chování libovolného řešení rovnice (5.1) splňující počáteční podmínku (4.6).

Zvolíme-li například bod \mathbf{x}^0 ve třetím kvadrantu a je-li $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (viz obrázek 63), potom z tvaru orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ vidíme, že obě složky řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$ jsou záporné pro $t \in \mathbb{R}$ a konvergují k 0 pro $t \rightarrow \infty$, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0.$$



Obrázek 63: Pro \mathbf{x}^0 z třetího kvadrantu šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří nahoru a doprava. Orbita konverguje k počátku \mathbf{o} .

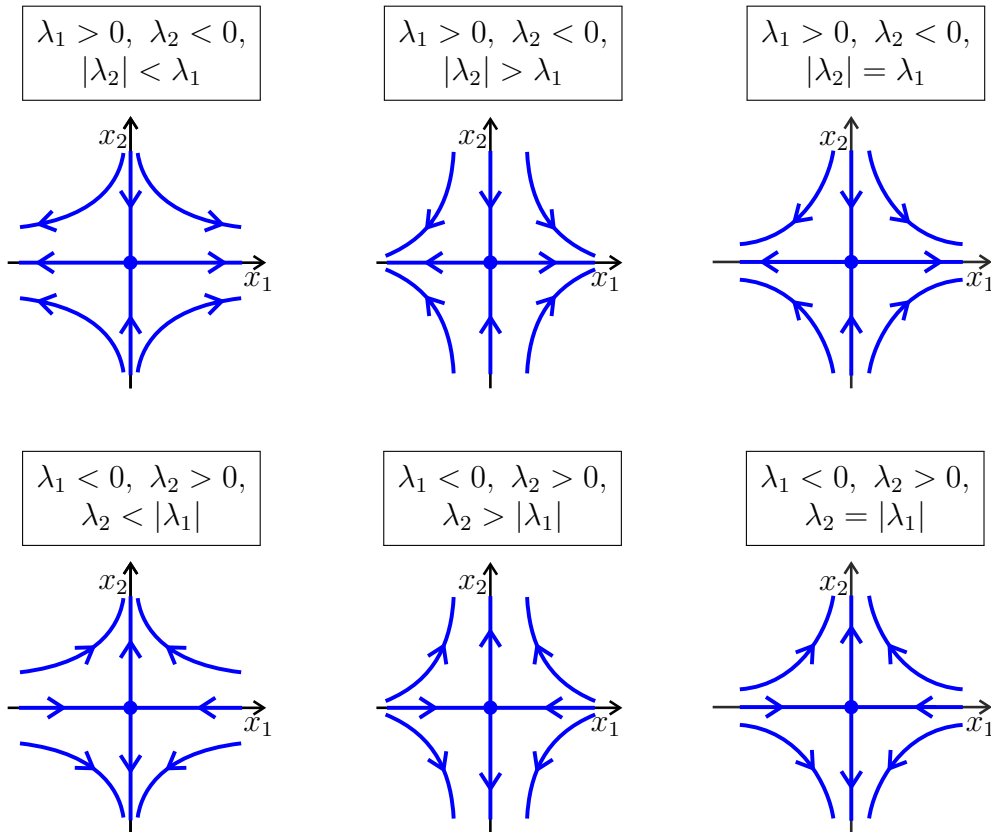
Druhá složka $x_2(t)$ přitom konverguje k 0 rychleji než první složka $x_1(t)$.

Takové informace budeme oceňovat zejména u složitějších rovnic, u nichž neumíme najít explicitní tvar řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$.

Věta 5.3 Nechť \mathbf{J} je diagonální matice s reálnými vlastními čísly λ_1, λ_2 , která splňuje podmínku

$$\lambda_1 \lambda_2 < 0. \quad (5.9)$$

Potom rovnice (5.1) má jeden z šesti fázových portrétů na obrázku 64.



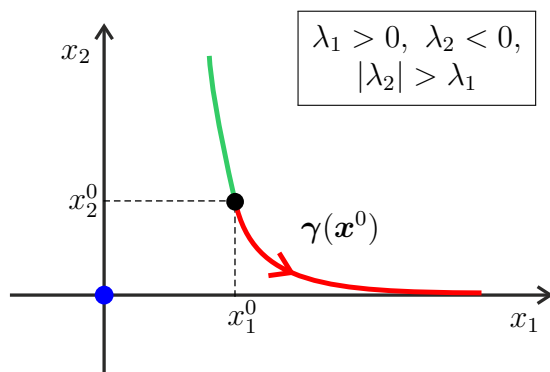
Obrázek 64: Fázové portréty rovnice (5.1).

Důkaz. Rovnici (5.1) lze stejně jako v důkazu věty 5.1 zapsat ve tvaru (5.3) a parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ příslušné k řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ úlohy (5.3), (4.6) mají tvar (5.4). Jediný kritický bod $(0, 0)$ a polopřímkové orbity na osách x_1 a x_2 odvodíme stejným způsobem jako v důkazu věty 5.1.

Zvolme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ uvnitř prvního kvadrantu. Potom opět orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ leží celá v prvním kvadrantu a má rovnici (5.7), kde c, k jsou dány vzorci (5.6). Protože jsme zvolili $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0$, je konstanta $c > 0$. Z (5.9) nyní ale plyne, že $k < 0$, což je jediný rozdíl proti odpovídající části důkazu věty 5.1.

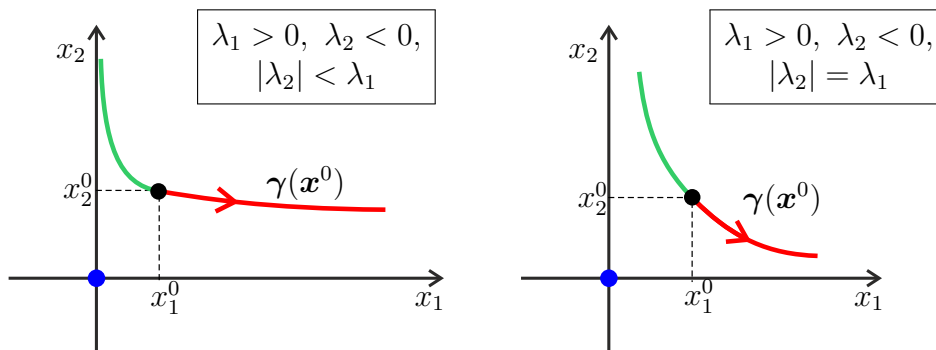
- (a) Nechť $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Pak mohou nastat tři případy. Buď $|\lambda_2| > \lambda_1$, tj. $k < -1$ a rovnice (5.7) určuje křivku typu větve hyperboly, jejíž asymptoty jsou osy x_1 a x_2 , přičemž konvergence k ose x_1 je rychlejší než k ose x_2 .

Z rovnice (5.4) plyne, že první složka řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je rostoucí a druhá složka řešení je klesající. Proto šipka v každém bodě orbity směřuje doprava a dolů (viz obrázek 65).



Obrázek 65: Pro \mathbf{x}^0 z prvního kvadrantu šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří dolů a doprava.

Další možnosti jsou $|\lambda_2| < \lambda_1$, tj. $k > -1$ a $|\lambda_2| = \lambda_1$, tj. $k = -1$. Dostaneme v obou případech křivku typu větve hyperboly, jejíž asymptoty jsou osy x_1 a x_2 . Přitom, je-li $k > -1$, je konvergence této křivky k ose x_2 rychlejší než k ose x_1 . Pro $k = -1$ je rychlost konvergence k oběma osám stejná (viz obrázek 66).

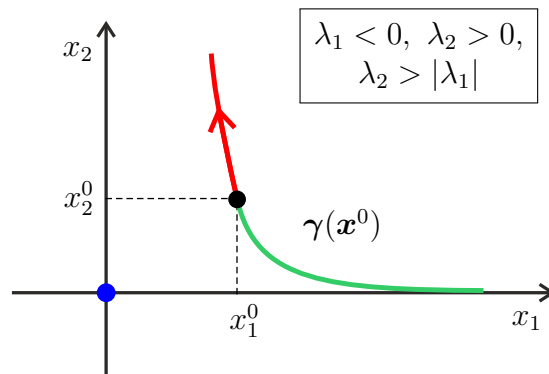


Obrázek 66: Pro \mathbf{x}^0 z prvního kvadrantu šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří dolů a doprava.

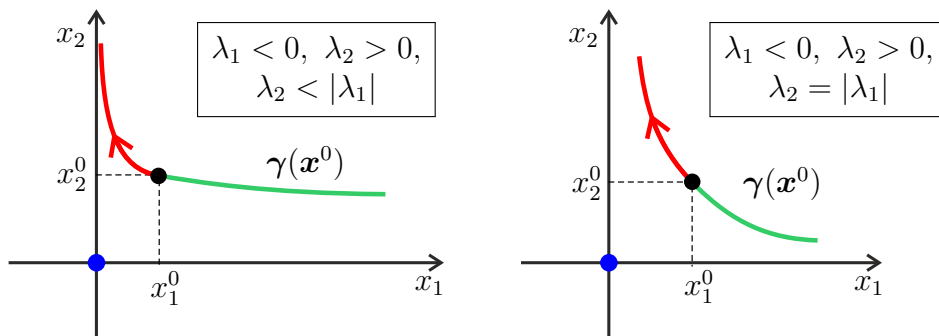
(b) *Nechť* $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Pak mohou nastat tři případy.

Prvním je $\lambda_2 > |\lambda_1|$, tj. $k < -1$ a rovnice (5.7) určuje křivku typu větve hyperboly, jejíž asymptoty jsou osy x_1, x_2 , přičemž konvergence k ose x_1 je rychlejší než k ose x_2 . Z rovnic (5.4) plyne, že první složka řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je klesající a druhá je rostoucí. Proto šipka na orbitě směřuje vždy doleva a nahoru (viz obrázek 67).

Podobně odvodíme orbity v případech $|\lambda_1| > \lambda_2$ a $|\lambda_1| = \lambda_2$ (viz obrázek 68).



Obrázek 67: Pro \mathbf{x}^0 z prvního kvadrantu šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří nahoru a doleva.



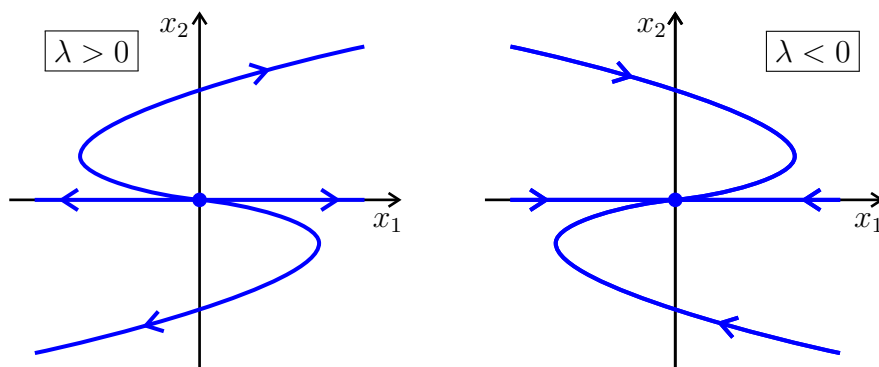
Obrázek 68: Pro \mathbf{x}^0 z prvního kvadrantu šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ míří nahoru a doleva.

Pokud volíme bod \mathbf{x}^0 v jiném kvadrantu, postupujeme analogicky a pro záporné x_1^0 pracujeme s rovnicí (5.8). \square

Věta 5.4 *Nechť matice \mathbf{J} má dvojnásobné reálné vlastní číslo $\lambda \neq 0$ a nechť*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Potom rovnice (5.1) má jeden ze dvou fázových portrétů na obrázku 69.



Obrázek 69: Dva možné fázové portréty rovnice (5.1) pro dvojnásobné reálné vlastní číslo λ .

Důkaz. Rovnici (5.1) lze ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = \lambda x_2(t). \end{cases} \quad (5.10)$$

Podle věty 4.1 pro libovolný bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ existuje jediné řešení soustavy (5.10) splňující podmínku (4.6). Toto řešení má tvar

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{J}t} \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 e^{\lambda t} + x_2^0 t e^{\lambda t} \\ x_2^0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ jsou určeny složkami vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a mají tvar

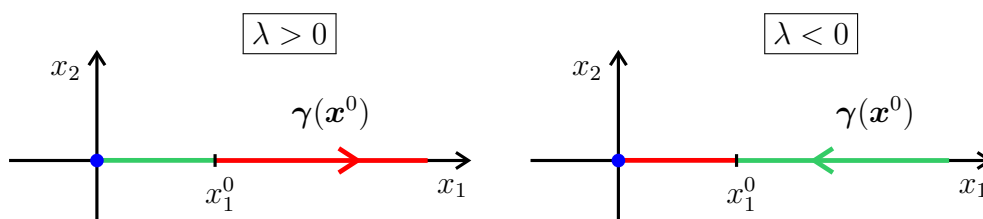
$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda t} + x_2^0 t e^{\lambda t}, \quad x_2 = x_2^0 e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

1. Zvolme $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$. Pak dostáváme z (5.11) kritický bod $(0, 0)$, jehož orbita je jednobodová.

2. Zvolme \mathbf{x}^0 na kladné poloose x_1 , tj. $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, 0)$, $x_1^0 > 0$. Dosazením tohoto bodu do (5.11) dostaneme parametrické rovnice $\gamma(\mathbf{x}^0)$

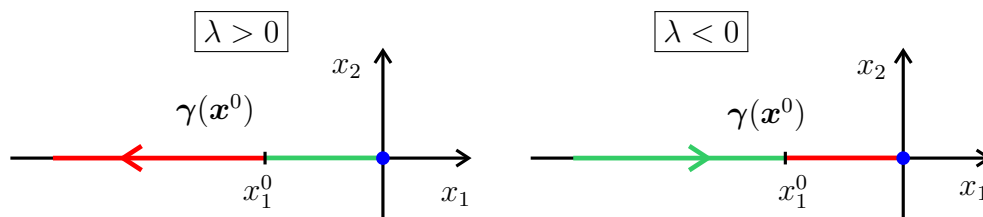
$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda t}, \quad x_2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stejně jako v důkazu věty 5.1 rozlišíme dva případy podle znaménka vlastního čísla λ a ukážeme, že odpovídající orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je v obou případech kladná poloosa x_1 . Přitom pro $\lambda > 0$ směřuje šipka v každém bodě orbity doprava, pro $\lambda < 0$ doleva (viz obrázek 70).



Obrázek 70: Orbita bodu na kladné poloose x_1 je celá kladná poloosa x_1 . Pro $\lambda > 0$ orientovaná doprava, pro $\lambda < 0$ doleva.

Pokud zvolíme \mathbf{x}^0 na záporné poloose x_1 , dostaneme orbity na obrázku 71.



Obrázek 71: Orbita bodu na záporné poloose x_1 je celá záporná poloosa x_1 . Pro $\lambda > 0$ orientovaná doleva, pro $\lambda < 0$ doprava.

3. Nyní zvolme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ v horní polorovině, tj. x_1^0 je libovolné a $x_2^0 > 0$. Všimněme si, že na rozdíl od vět 5.1 a 5.3, kladná a záporná část osy x_2 nejsou orbitami rovnice (5.10). To znamená, že zde orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ může protínat osu x_2 , ale v souladu s větou 4.1 musí celá $\gamma(\mathbf{x}^0)$ ležet v horní polorovině, tedy nemůže protnout ani se dotknout osy x_1 . Pro určení tvaru křivky $\gamma(\mathbf{x}^0)$ vyloučíme z rovnic (5.11) parametr t . Platí

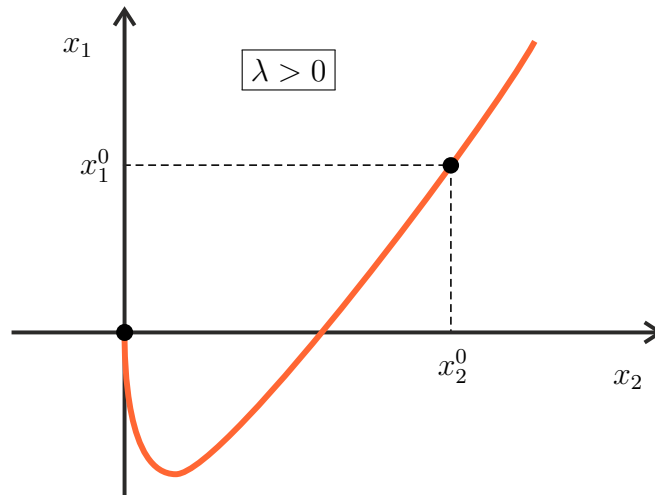
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^0}{x_2^0} + t, \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{x_2}{x_2^0} \right).$$

Tedy $\gamma(\mathbf{x}^0)$ má rovnici

$$x_1 = x_2 \left(\frac{x_1^0}{x_2^0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{x_2}{x_2^0} \right) \right), \quad x_2 \in (0, \infty). \quad (5.12)$$

Vyšetříme-li průběh funkce dané v (5.12), dostaneme její graf a po záměně os x_1 a x_2 dostaneme orbitu $\gamma(\mathbf{x}^0)$.

- (a) *Nechť* $\lambda > 0$. Potom rovnice (5.12) určuje křivku vycházející z počátku a dotýkající se osy x_1 (viz obrázek 72).



Obrázek 72: Graf funkce dané rovnicí (5.12) pro $\lambda > 0$. Vychází z počátku a dotýká se osy x_1 .

Z rovnic (5.11) dostáváme

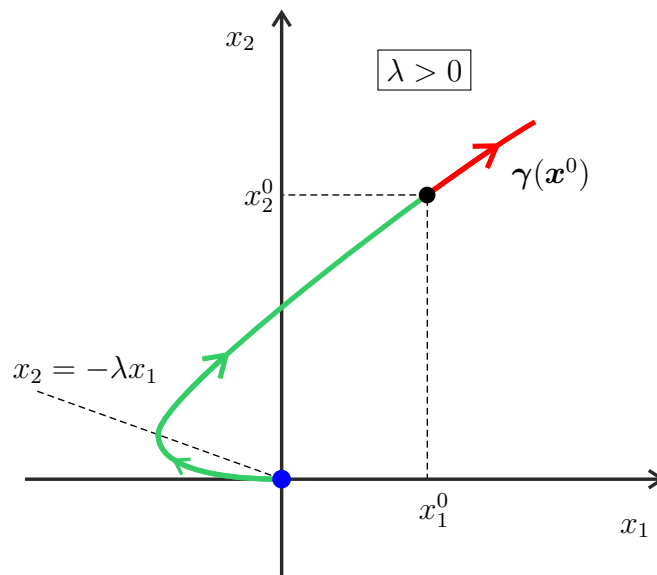
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_1^0 e^{\lambda t} + x_2^0 t e^{\lambda t}) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2^0 e^{\lambda t} = \infty.$$

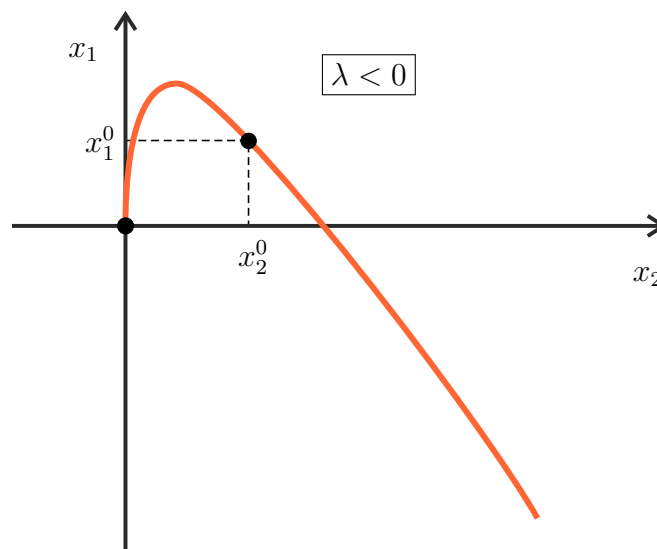
Dále z druhé rovnice v (5.10) vidíme, že pro $x_2(t) > 0$ je $x_2'(t) > 0$, a tedy druhá složka řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))$ stále roste, a proto šipka v každém bodě orbity směřuje nahoru. Z první rovnice v (5.10) dostáváme, že pokud je $\lambda x_1(t) + x_2(t) < 0$, tak $x_1'(t) < 0$ a první složka $x_1(t)$ klesá, zatímco pro $\lambda x_1(t) + x_2(t) > 0$ je $x_1'(t) > 0$ a $x_1(t)$ roste. To znamená, že na části orbity mezi počátkem a průsečíkem s přímkou $\lambda x_1 + x_2 = 0$ směřuje šipka doleva a v další části orbity pak už stále směřuje doprava (viz obrázek 73).

Přímku $\lambda x_1 + x_2 = 0$ nazýváme první izoklinou rovnice (5.10). Viz dále definici 6.11.

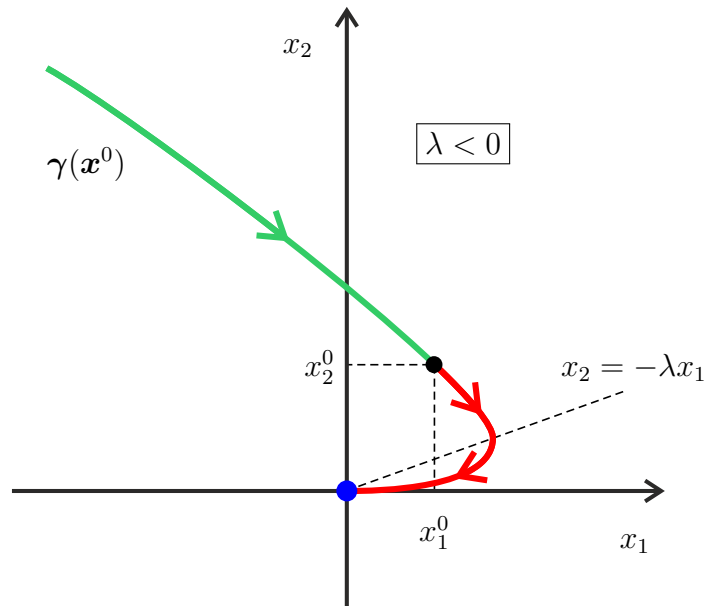
- (b) *Nechť* $\lambda < 0$. Potom graf funkce z (5.12) je znázorněn na obrázku 74. Odsud užitím analogických úvah jako pro $\lambda > 0$ dostaneme orbitu $\gamma(\mathbf{x}^0)$ (viz obrázek 75).



Obrázek 73: Orbita $\gamma(x^0)$ získaná z grafu na obrázku 72. Šipky na orbitě směřují stále nahoru. Do průsečíku s přímkou $x_2 = -\lambda x_1$ směřují doleva a v další části orbity pak už stále doprava.



Obrázek 74: Graf funkce dané rovnicí (5.12) pro $\lambda < 0$. Vychází z počátku a dotýká se osy x_1 .

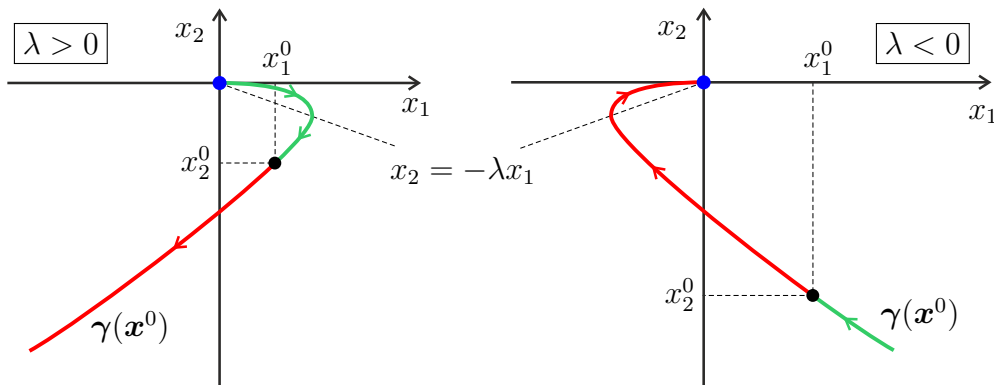


Obrázek 75: Orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ získaná z grafu na obrázku 74. Šipky na orbitě směřují stále dolů. Do průsečíku s přímkou $x_2 = -\lambda x_1$ směřují doprava a v další části orbity pak už stále doleva.

4. Stejným způsobem postupujeme, pokud volíme bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ v dolní polorovině, tj. x_1^0 je libovolné a $x_2^0 < 0$. Potom celá orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ leží v dolní polorovině, a tedy $x_2(t) < 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Proto $\gamma(\mathbf{x}^0)$ má rovnici

$$x_1 = x_2 \left(\frac{x_1^0}{x_2^0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{x_2}{x_2^0} \right| \right), \quad x_2 \in (-\infty, 0). \quad (5.13)$$

Odpovídající orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ pro $\lambda > 0$ a $\lambda < 0$ jsou znázorněny na obrázku 76.

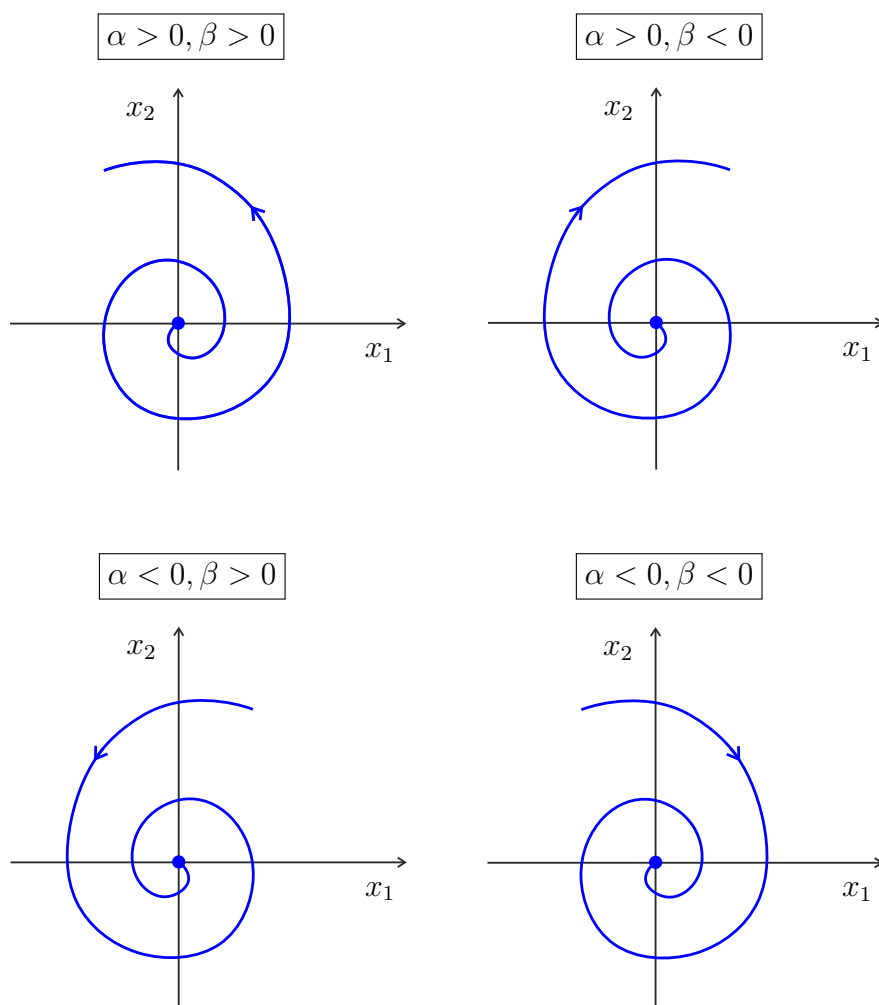


Obrázek 76: Orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ pro \mathbf{x}^0 z dolní poloroviny.

□

Věta 5.5 *Nechť \mathbf{J} je matice s komplexně sdruženými vlastními čísly $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, přičemž $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.*

Potom rovnice (5.1) má jeden ze čtyř fázových portrétů na obrázku 77.



Obrázek 77: Čtyři možné fázové portréty rovnice (5.1).

Důkaz. Matice \mathbf{J} má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

a tedy rovnici (5.1) lze ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_2(t), \\ x_2'(t) = \beta x_1(t) + \alpha x_2(t). \end{cases} \quad (5.14)$$

Podle věty 4.1 pro libovolný bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ existuje jediné řešení soustavy (5.14) splňující podmínku (4.6). Toto řešení má tvar

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{x}^0) &= e^{\mathbf{J}t} \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^0 e^{\alpha t} \cos \beta t - x_2^0 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ x_1^0 e^{\alpha t} \sin \beta t + x_2^0 e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zvolíme-li $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ dostáváme pro počáteční úlohu (5.14), (4.6) jako odpovídající řešení kritický bod $(0, 0)$, jehož orbita je jednobodová.

Nyní budeme předpokládat, že $\mathbf{x}^0 \neq (0, 0)$. V tomto případě je výhodné užít transformaci do polárních souřadnic a najít nový tvar řešení a rovnici orbity v polárních souřadnicích. Do (5.14) proto zavedeme substituci

$$x_1(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad x_2(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

vyjadřující vztah mezi vektorovou funkcí $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$ a novou vektorovou funkcí $(r(t), \theta(t))^T$, jejíž první složka $r(t)$ je kladná na \mathbb{R} . Přitom pro libovolné pevné $t \in \mathbb{R}$ je v \mathbb{R}^2 vztah mezi bodem $(x_1(t), x_2(t))$, v němž $x_1(t) \neq 0$, a bodem $(r(t), \theta(t))$ charakterizován vztahem

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = r^2(t), \quad \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \operatorname{tg} \theta(t). \quad (5.16)$$

Derivací první rovnice v (5.16) dostaneme

$$2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) = 2r(t)r'(t)$$

a dosazení z (5.14) vede k rovnici

$$x_1(t)(\alpha x_1(t) - \beta x_2(t)) + x_2(t)(\beta x_1(t) + \alpha x_2(t)) = r(t)r'(t),$$

což po úpravě dává

$$r'(t) = \alpha r(t). \quad (5.17)$$

Je-li $x_1(t) \neq 0$, z druhé rovnice v (5.16) plyne $\theta(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right) + n\pi$ pro libovolné celé číslo n . Proto platí

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right)^2} \frac{x_2'(t)x_1(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1^2(t)} = \frac{x_2'(t)x_1(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1^2(t) + x_2^2(t)}.$$

Dosazením (5.14) a vzhledem k tomu, že $r, x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R})$, odtud dostaneme

$$\theta'(t) = \frac{(\beta x_1(t) + \alpha x_2(t))x_1(t) - (\alpha x_1(t) - \beta x_2(t))x_2(t)}{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = \beta,$$

což společně s (5.17) vede k systému

$$r'(t) = \alpha r(t), \quad \theta'(t) = \beta. \quad (5.18)$$

Substitucí (5.15) je počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \neq \mathbf{o}$ transformován na bod (r_0, ρ_0) , kde kladná konstanta r_0 je vzhledem k (5.16) jednoznačně určena vzorcem

$$r_0 = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}.$$

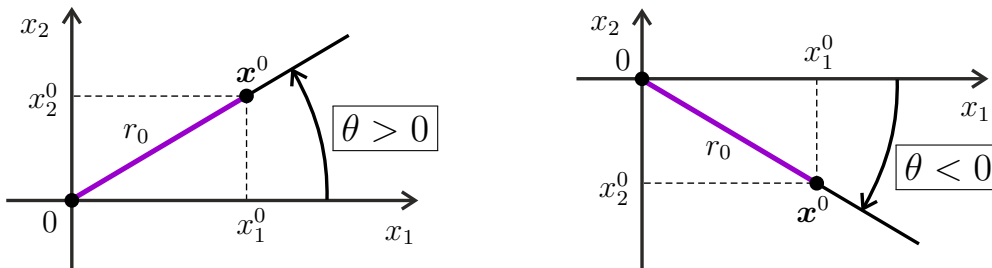
Oproti tomu θ_0 není dáno jednoznačně a splňuje podmínku

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_2^0}{x_1^0} \right) + n\pi$$

pro libovolné celé n . V dalším budeme proto předpokládat, že $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$. Potom k bodu $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bude bod $(r_0, \theta_0) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ jednoznačně určen a počáteční podmínka (4.6) přejde na

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (5.19)$$

Připomeňme, že úhel θ_0 měřený od kladné poloosy x_1 proti směru pohybu h. r. (hodinových ručiček) je kladný, zatímco úhel θ_0 měřený od kladné poloosy x_1 po směru pohybu h. r. je záporný (viz obrázek 78).



Obrázek 78: Kladný a záporný úhel θ_0 .

Řešení počáteční úlohy (5.18), (5.19) nacházíme elementárními metodami řešení diferenciálních rovnic jako vektorovou funkci

$$(r(t), \theta(t))^T = (r_0 e^{\alpha t}, \theta_0 + \beta t)^T, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.20)$$

Parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ jsou určeny složkami vektorové funkce (5.20), tj. mají tvar

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.21)$$

Nyní z rovnic (5.21) vyloučíme parametr t . Z druhé rovnice máme $t = \frac{\theta - \theta_0}{\beta}$ a dosazení do první rovnice dává následující rovnici orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ v polárních souřadnicích

$$r = c e^{k\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (5.22)$$

přičemž konstanty c a k závisí na složkách α, β vlastních čísel matice a na počátečním bodu (r_0, θ_0) , který je jednoznačně určen z bodu (x_1^0, x_2^0) . Platí zde

$$k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad c = r_0 e^{-k\theta_0}.$$

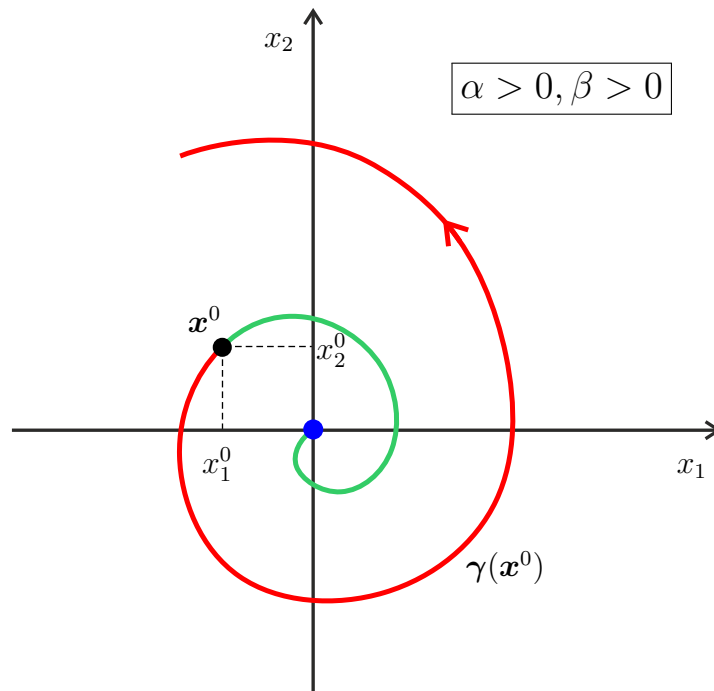
Orbita daná rovnicí (5.22) je logaritmická spirála, jejíž tvar je určen znaménkem čísla k a směr šipky na orbitě je dán znaménkem čísla β .

(a) *Necht'* $\alpha > 0, \beta > 0$. Potom podle (5.20) jsou funkce $r(t)$ a $\theta(t)$ rostoucí a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_0 e^{\alpha t} = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_0 + \beta t) = \infty.$$

Tedy bod $(x_1(t), x_2(t))$ na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ se pro rostoucí t bude vzdalovat od počátku do nekonečna a bude po orbitě nekonečněkrát obíhat kolem počátku proti směru h. r. (viz obrázek 79).



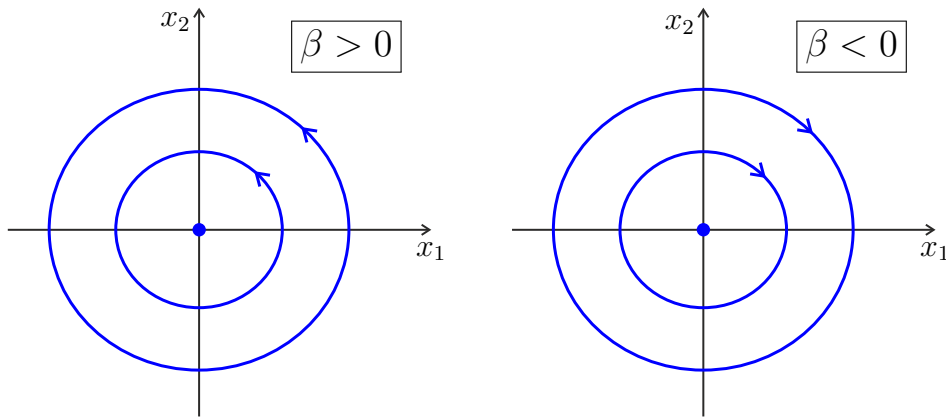
Obrázek 79: Tvar orbity pro $\alpha > 0$ a $\beta > 0$.

(b) Podobně odvodíme zbývající tři typy orbit pro $\alpha > 0, \beta < 0$, dále pro $\alpha < 0, \beta > 0$, a nakonec pro $\alpha < 0, \beta < 0$.

□

Věta 5.6 *Nechť \mathbf{J} je matice s ryze imaginárními vlastními čísly $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.*

Potom rovnice (5.1) má jeden ze dvou fázových portrétů na obrázku 80.



Obrázek 80: Dva možné tvary orbit rovnice (5.1) pro ryze imaginární vlastní čísla ($\alpha = 0$).

Důkaz. Matice \mathbf{J} má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy rovnici (5.1) lze ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\beta x_2(t), \\ x_2'(t) = \beta x_1(t). \end{cases} \quad (5.23)$$

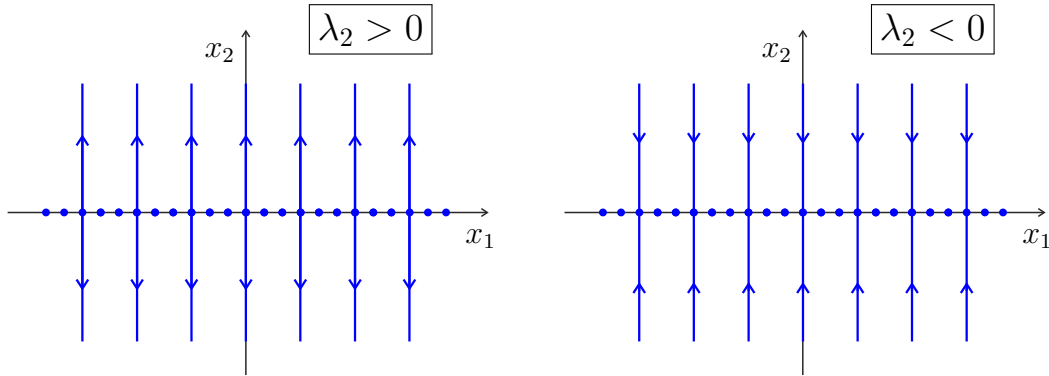
Nyní postupujeme stejně jako v důkazu věty 5.5.

Položíme $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ a dostaneme řešení úlohy (5.23), (4.6), které je kritickým bodem $(0, 0)$ a jehož orbita je jednobodová. Pomocí substituce (5.15) odvodíme pro $\mathbf{x}^0 \neq (0, 0)$ řešení úlohy (5.23), (4.6) ve tvaru (5.20) s $\alpha = 0$ a parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ ve tvaru (5.21) s $\alpha = 0$, tj. $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \theta_0 + \beta t$, $t \in \mathbb{R}$. Z těchto rovnic plyne, že vzdálenost $r(t)$ bodu $(x_1(t), x_2(t))$ na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ od počátku je konstantní, tedy $r(t) = r_0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. To znamená, že orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem r_0 . Dále podle znaménka čísla β bude bod $(x_1(t), x_2(t))$ pro rostoucí t rotovat po orbitě proti směru h. r. ($\beta > 0$), nebo po směru h.r. ($\beta < 0$). \square

Věta 5.7 Necht' \mathbf{J} je matice s reálnými vlastními čísly λ_1, λ_2 , které splňují podmínku

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0. \quad (5.24)$$

Potom rovnice (5.1) má jeden ze dvou fázových portrétů na obrázku 81. V obou případech je osa x_1 složena z kritických bodů rovnice (5.1).



Obrázek 81: Dva možné tvary orbit rovnice (5.1) pro $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 \neq 0$.

Důkaz. Matice \mathbf{J} má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

a tedy rovnici (5.1) lze ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = 0, \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t). \end{cases} \quad (5.25)$$

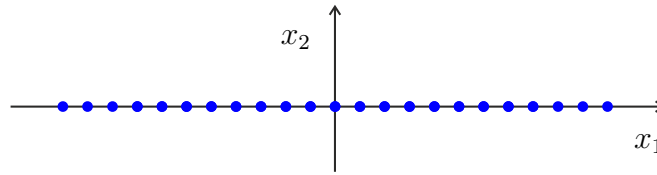
Podle věty 4.1 pro libovolný bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ existuje jediné řešení soustavy (5.25) splňující podmínku (4.6). Toto řešení má tvar

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{J}t} \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ jsou určeny složkami vektorové funkce $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a mají tvar

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

1. Zvolme počáteční bod \mathbf{x}^0 na ose x_1 , tj. $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, 0)$, kde x_1^0 je libovolné reálné číslo. Dosazením tohoto bodu do (5.26) dostáváme kritický bod $(x_1^0, 0)$, jehož orbita je jednobodová. Rovnice (5.25) má proto nekonečně mnoho kritických bodů, které tvoří osu x_1 (viz obr. 82).



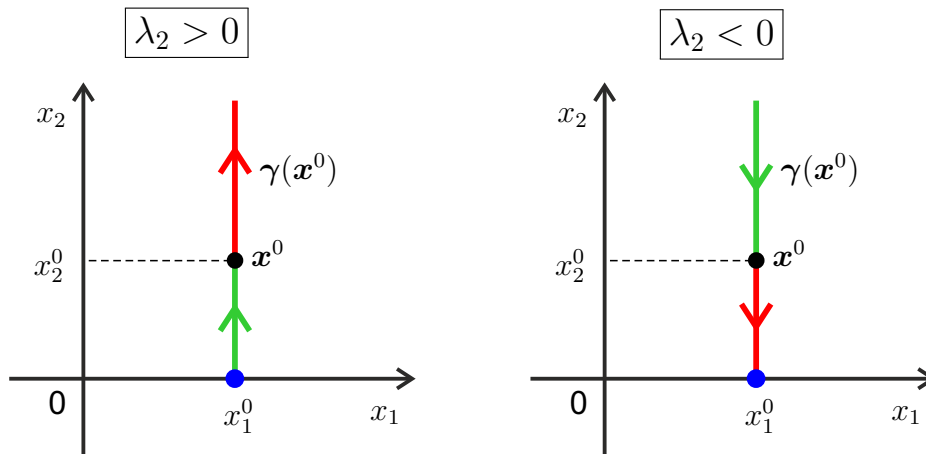
Obrázek 82: Osa x_1 je tvořena samými kritickými body rovnice (5.25).

2. Zvolme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ v horní polorovině. Pak $x_1^0 \in \mathbb{R}$, $x_2^0 > 0$.

(a) *Nechť* $\lambda_2 > 0$. Potom platí

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_2^0 e^{\lambda_2 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2^0 e^{\lambda_2 t} = \infty$$

a z parametrických rovnic orbity (5.26) vidíme, že $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je polopřímka ležící v horní polorovině a rovnoběžná s osou x_2 . Potom druhá složka $x_2(t) = x_2^0 e^{\lambda_2 t}$ řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je rostoucí funkce, a tedy šipka na orbitě směřuje nahoru (viz obrázek 83 vlevo).



Obrázek 83: Šipka na orbitě rovnice (5.26) v horní polorovině směřuje pro $\lambda_2 > 0$ nahoru (vlevo) a pro $\lambda_2 < 0$ dolů (vpravo).

(b) *Nechť* $\lambda_2 < 0$. Protože je

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_2^0 e^{\lambda_2 t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2^0 e^{\lambda_2 t} = 0,$$

vidíme z (5.26), že $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je opět polopřímka ležící v horní polorovině a rovnoběžná s osou x_2 , přičemž $x_2(t)$ je klesající funkce, a proto šipka na orbitě směřuje dolů (viz obrázek 83 vpravo).

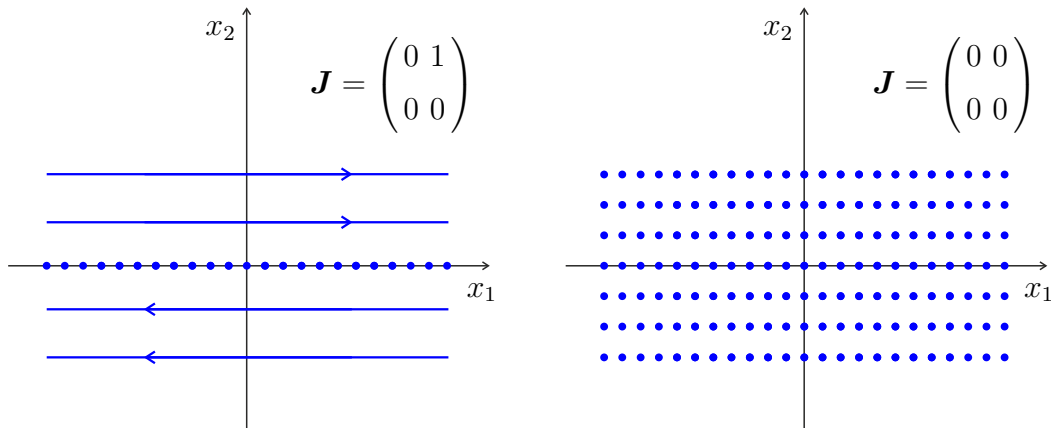
3. Pokud bod \mathbf{x}^0 volíme v dolní polorovině, postupujeme analogicky.

□

Věta 5.8 *Nechť matice \mathbf{J} má obě vlastní čísla nulová. Pak platí*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V prvním případě má rovnice (5.1) fázový portrét, v němž je osa x_1 složena z kritických bodů rovnice (5.1) a ostatní orbity jsou přímky rovnoběžné s osou x_1 (viz obrázek 84 vlevo). Ve druhém případě má rovnice (5.1) fázový portrét celé \mathbb{R}^2 a je složený ze samých kritických bodů rovnice (5.1) (viz obrázek 84 vpravo).



Obrázek 84: Dva možné fázové portréty rovnice (5.1) pro $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Důkaz. • V prvním případě lze rovnici (5.1) ekvivalentně zapsat jako systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Pro libovolný bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ má systém (5.27) jediné řešení splňující podmínku (4.6), které má tvar

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{J}t} \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 + tx_2^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrické rovnice orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ jsou určeny složkami řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ a mají tvar

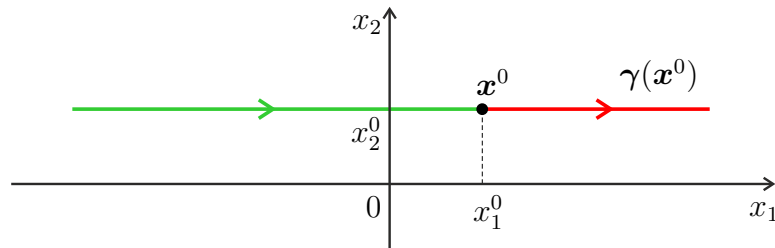
$$x_1 = x_1^0 + tx_2^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

1. Stejně jako v důkazu věty 5.7 dostáváme z (5.28), že rovnice (5.27) má nekonečně mnoho kritických bodů, které tvoří osu x_1 .

2. Zvolme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ v horní polorovině, tj. $x_1^0 \in \mathbb{R}$, $x_2^0 > 0$.
Potom

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1^0 + tx_2^0) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x_1^0 + tx_2^0) = \infty,$$

a proto z (5.28) plyne, že $\gamma(\mathbf{x}^0)$ je přímka rovnoběžná s osou x_1 . Protože první složka $x_1(t) = x_1^0 + tx_2^0$ řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je rostoucí funkcí, směřuje šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ doprava (viz obrázek 85).



Obrázek 85: Šipky na orbitách rovnice (5.27) v horní polorovině směřují všechny doprava.

3. Pokud bod \mathbf{x}^0 volíme v dolní polorovině, postupujeme analogicky.

• V druhém případě je $x_1'(t) = x_2'(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, a proto je každý bod $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ kritickým bodem. \square

6 Planární lineární dynamické systémy s obecnou konstantní maticí A



Cílem této kapitoly je:

- naučit se rozhodnout o typu fázového portréту vektorové rovnice

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (6.1)$$

pro libovolnou dvourozměrnou konstantní maticí \mathbf{A} ;

- naučit se určovat přibližný tvar fázového portréту pomocí vlastních přímků a izoklin.

Budeme zde pracovat se dvěma fázovými rovinami. V jedné budeme vyšetřovat fázové portréty rovnice (6.1) a ve druhé budeme určovat fázové portréty rovnice (5.1) s kanonickou maticí \mathbf{J} , které jsme vyšetřovali v kapitole 5. Abychom tyto dvě fázové roviny odlišili, budeme psát rovnici (5.1) ve tvaru

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t). \quad (6.2)$$

Předpokládejme, že matice \mathbf{J} v (6.2) je Jordanův kanonický tvar matice \mathbf{A} v (6.1). Potom existuje regulární matice \mathbf{P} taková, že platí

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (6.3)$$

V kapitole 4 jsme se naučili k dané maticí \mathbf{A} určovat obě matice \mathbf{J} a \mathbf{P} . Rovněž jsme dokázali, že transformace

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y} \quad (6.4)$$

převádí řešení $\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{y}^0)$ rovnice (6.2) splňující podmínku $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^0$ na řešení $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^0)$ rovnice (6.1) splňující podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. To znamená, že \mathbf{P} transformuje fázový portrét rovnice (6.2) na fázový portrét rovnice (6.1) tak, že body (y_1, y_2) fázové roviny rovnice (6.2) převádí vzájemně jednoznačně na body (x_1, x_2) fázové roviny rovnice (6.1). Tedy orbity rovnice (6.2) jsou jednoznačně transformovány na orbity rovnice (6.1), přičemž směr šipek na orbitách zůstává zachován. Například směřují-li šipky na orbitách rovnice (6.2) ke kritickému bodu, platí totéž i pro šipky na orbitách rovnice (6.1).

Naší snahou bude nyní ukázat, jak z jednotlivých fázových portrétů, které jsme odvodili v kapitole 5, dostaneme transformací (6.4) fázové portréty rovnice (6.1).

Věta 6.1 Při transformaci (6.4) přejde kritický bod $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ rovnice (6.2) na kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rovnice (6.1). Speciálně kritický bod $\mathbf{o} = (0, 0)$ rovnice (6.2) přejde na kritický bod $\mathbf{o} = (0, 0)$ rovnice (6.1).

Důkaz. Necht' $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ je kritický bod rovnice (6.2), tedy platí $\mathbf{J}\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{o}$. Necht' $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}$. Podle (6.3) je

$$\mathbf{o} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}.$$

Protože \mathbf{P} je regulární matice, musí platit $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{o}$, což znamená, že $\bar{\mathbf{x}}$ je kritický bod rovnice (6.1). Je-li speciálně $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$, pak $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{o}$, a proto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$, je bod $(0, 0)$ kritickým bodem rovnice (6.1). \square

Poznámka 6.2 1. Z věty 6.1 plyne, že rovnice (6.1) a (6.2) mají stejný počet kritických bodů. Tedy buď mají obě pouze jediný kritický bod $(0, 0)$, nebo mají celou přímku kritických bodů. Poslední možností je případ $\mathbf{A} = \mathbf{J} = \mathbf{O}$, tj. obě rovnice mají pouze konstantní řešení, a proto každý bod ve fázové rovině je jejich kritickým bodem.

2. Z regularity matice \mathbf{P} v lineární transformaci (6.4) vyplývá, že rovnice (6.1) a (6.2) mají rovněž stejný počet přímek ve svých fázových portrétech. Platí totiž, že každá přímka z fázového portréту rovnice (6.2) se jednoznačně zobrazí na přímku ve fázovém portréту rovnice (6.1) a přitom rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky a přímky protínající se v počátku na přímky protínající se v počátku. Kromě toho, skládá-li se nějaká přímka ve fázovém portréту rovnice (6.2) z kritických bodů, skládá se i její obraz ve fázovém portréту rovnice (6.1) z kritických bodů.

Definice 6.3 Necht' matice \mathbf{A} v (6.1) má reálné vlastní číslo λ_1 a necht' $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ je vlastní vektor matice \mathbf{A} odpovídající číslu λ_1 . Potom přímku procházející počátkem a mající směr vektoru \mathbf{p} budeme nazývat *vlastní přímkou rovnice (6.1) příslušnou k λ_1* .

Všimněme si, že matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

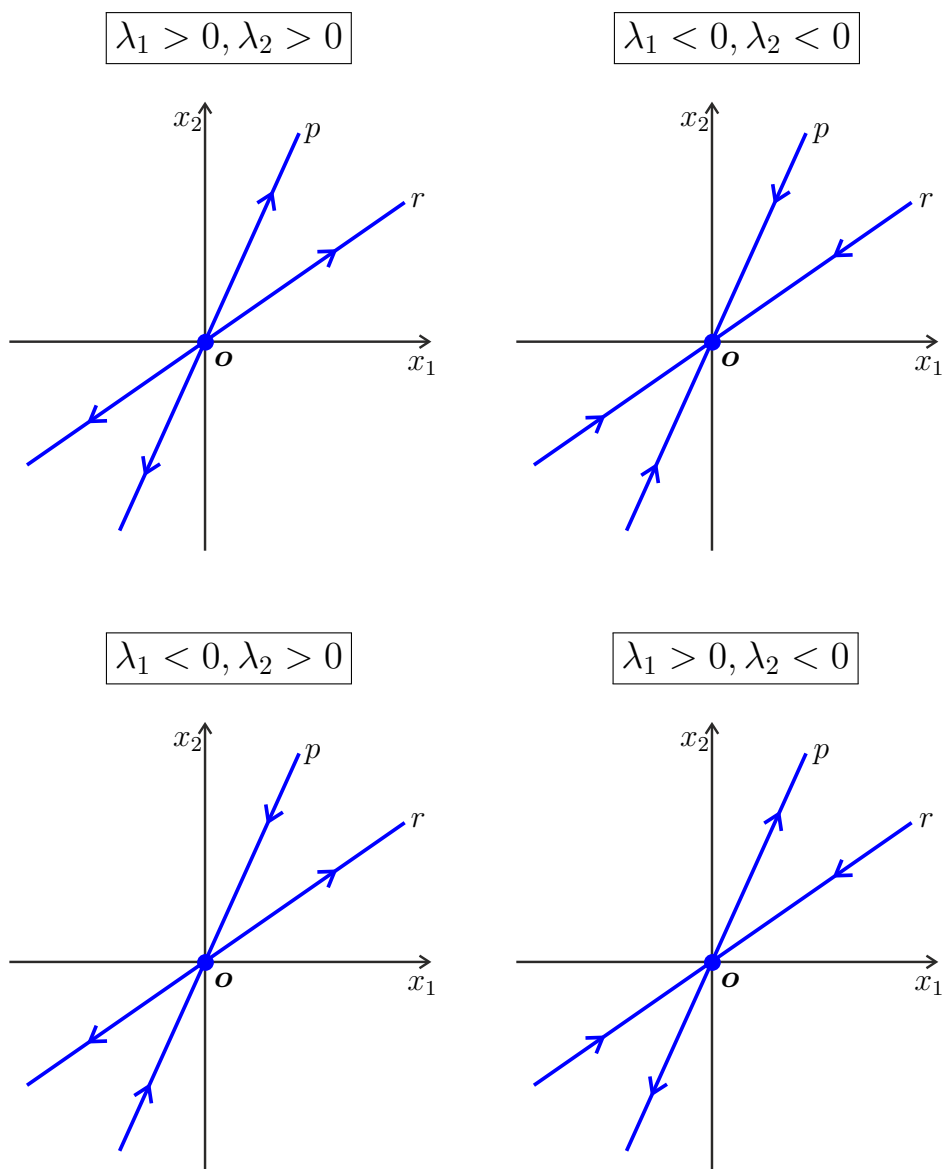
má dvě vlastní přímky, což jsou osy y_1 a y_2 , a matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

má jedinou vlastní přímku, což je osa y_1 .

Věta 6.4 Necht' matice \mathbf{A} má dvě reálná různá nenulová vlastní čísla λ_1, λ_2 a necht' $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ je vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ_1 , $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ je vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ_2 .

Potom fázový portrét rovnice (6.1) obsahuje dvě vlastní přímky rovnice (6.1) příslušné k λ_1 a k λ_2 . Směr šipek na vlastních přímkách je určen znaménky čísel λ_1 a λ_2 (viz obrázek 86).



Obrázek 86: Orbity — vlastní přímky rovnice (6.1). Směr šipek závisí na znaménkách vlastních čísel λ_1 (na přímce p) a λ_2 (na přímce r).

Důkaz. Matice \mathbf{A} má Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nechť například $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Potom podle věty 5.3 obsahuje fázový portrét rovnice (6.2) osy y_1 a y_2 , přičemž šipky na ose y_1 směřují od počátku a šipky na ose y_2 směřují k počátku. Sloupce matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix},$$

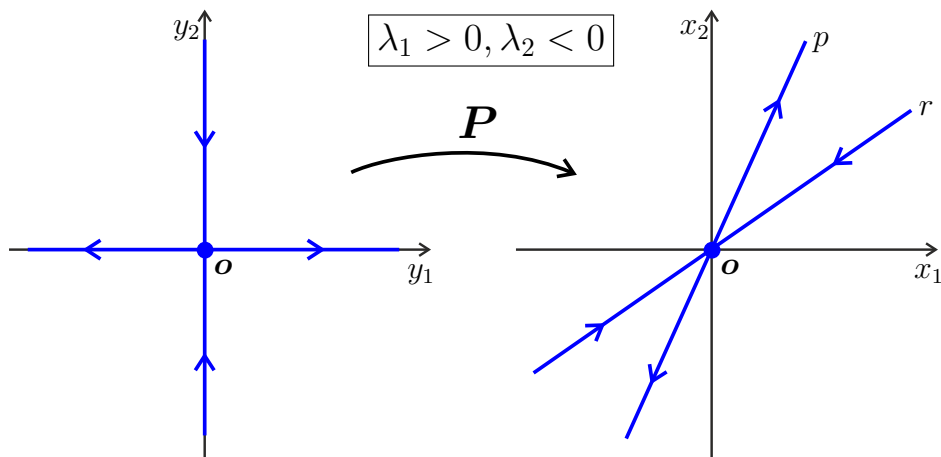
kteřá splňuje (6.3) jsou vlastní vektory matice \mathbf{A} . Sloupce $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ přísluší k λ_1 a sloupec $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ k λ_2 .

Uvažujme libovolný bod Y na ose y_1 . Potom $Y = (y_1, 0)$, kde $y_1 \in \mathbb{R}$. Tento bod transformací (6.4) přejde na bod $X = (x_1, x_2)$. Platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 y_1 \\ p_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Protože souřadnice bodu (x_1, x_2) jsou násobkem souřadnic vektoru $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$, leží bod (x_1, x_2) na vlastní přímce příslušné k λ_1 . Tedy osa y_1 přejde transformací (6.4) na vlastní přímku rovnice (6.1) příslušnou k λ_1 .

Podobně osa y_2 přejde touto transformací na vlastní přímku rovnice (6.1) příslušnou k λ_2 (viz obrázek 87).



Obrázek 87: Transformace \mathbf{P} mezi fázovými portréty kanonického a původního systému (6.1). Osy y_1 a y_2 přecházejí na vlastní přímky p a r .

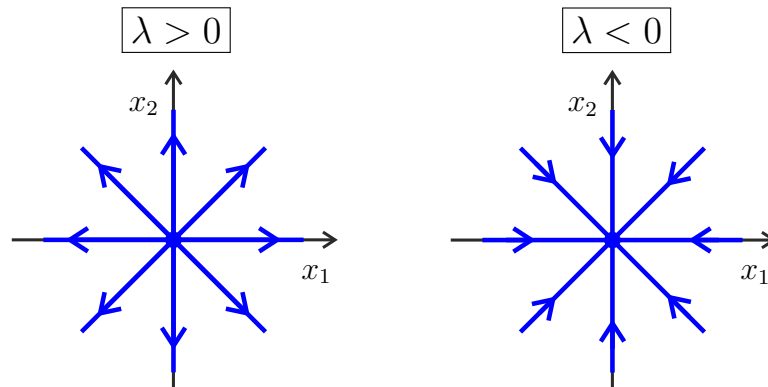
Další případy $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ nebo $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ dokazujeme stejným způsobem. \square

Vzhledem k poznámce 6.2 víme, že za předpokladů věty 6.4 jsou výše popsané vlastní přímky jedinými dvěma přímkami ve fázovém portréту rovnice (6.1). Podle vět 5.1 a 5.3 fázové portréty rovnice (6.2) totiž v tomto případě obsahují jediné dvě přímky (osy y_1 a y_2) a ostatní orbity jsou křivkami. Připomeňme ještě, že osa y_1 ve fázovém portrétu rovnice (6.2) se skládá ze tří orbit: kritického bodu $(0, 0)$, kladné poloosy y_1 a záporné poloosy y_1 . Proto i vlastní přímka rovnice (6.1) příslušná k λ_1 se skládá ze tří orbit: kritického bodu $(0, 0)$ a dvou polopřímek, na něž při transformaci (6.4) přejde kladná a záporná část osy y_1 . Totéž platí i pro osu y_2 a vlastní přímku rovnice (6.1) příslušnou k λ_2 .

Věta 6.5 *Nechť má matice \mathbf{A} dvojnásobné vlastní číslo $\lambda \neq 0$.*

- (i) *Je-li \mathbf{A} diagonální, skládá se fázový portrét rovnice (6.1) ze samých vlastních přímek příslušných k λ a protínajících se v počátku (viz obrázek 88).*
- (ii) *Není-li \mathbf{A} diagonální, obsahuje fázový portrét rovnice (6.1) jednu vlastní přímku příslušnou k λ . Ostatní orbity jsou křivky (viz obrázek 89).*

V obou případech šipky na přímkách směřují k počátku pro $\lambda < 0$ a od počátku pro $\lambda > 0$

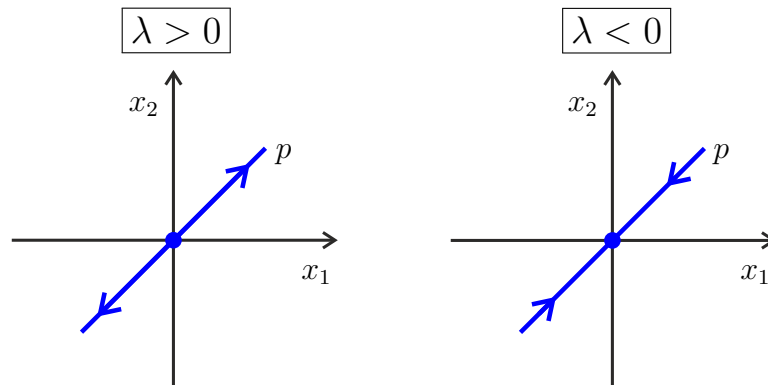


Obrázek 88: V případě (i) ve větě 6.5 je libovolný vektor vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušným k λ .

Důkaz.

- (i) Je-li \mathbf{A} diagonální, potom

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



Obrázek 89: V případě (ii) ve větě 6.5 je \mathbf{p} vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ .

a fázový portrét složený ze samých přímek protínajících se v počátku je odvozen v důkazu věty 5.1.

(ii) Není-li \mathbf{A} diagonální, potom má Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Podle věty 5.4 obsahuje fázový portrét rovnice (6.2) jedinou přímku a tou je osa y_1 . Ostatní orbity jsou křivky, a tedy transformací (6.4) přejdou opět na křivky ve fázovém portréту rovnice (6.1).

Nechť nyní například $\lambda > 0$. Podle věty 5.4 šipky na ose y_1 směřují od počátku. Stejně jako v důkazu věty 6.4 můžeme ukázat, že osa y_1 přejde transformací (6.4) na vlastní přímku rovnice (6.1) příslušnou k λ , na níž šipky směřují od počátku. Podobně postupujeme, pokud je $\lambda < 0$. \square

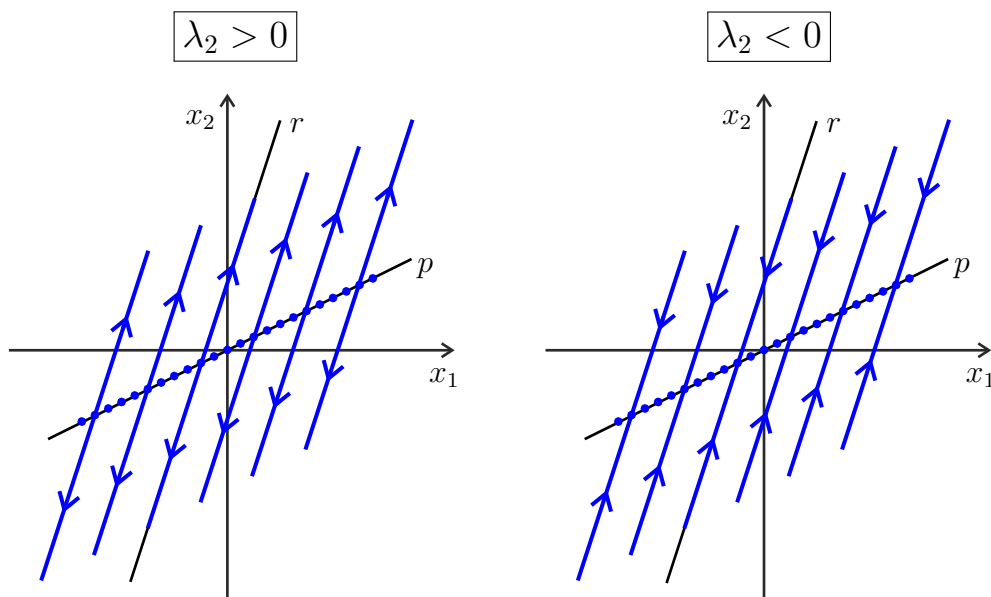
Ve větách 5.7 a 5.8 jsme diskutovali fázové portréty rovnice (6.2), které se skládají ze samých přímek. Proto fázové portréty rovnice (6.1), kterou dostaneme z (6.2) transformací (6.4), se budou rovněž skládat ze samých přímek. Odtud a z poznámky 6.2 plynou dvě následující věty.

Věta 6.6 *Nechť matice \mathbf{A} má dvě reálná vlastní čísla λ_1, λ_2 splňující podmínku*

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0.$$

Dále nechť \mathbf{p} je vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ_1 a \mathbf{r} je vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ_2 .

Potom má rovnice (6.1) jeden ze dvou fázových portrétů na obrázku 90.



Obrázek 90: Dva možné fázové portréty rovnice (6.1) splňující podmínku $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Vlevo pro $\lambda_2 > 0$, vpravo pro $\lambda_2 < 0$.

Věta 6.7 *Nechť nenulová matice \mathbf{A} má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 0$ a nechť $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ je vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k λ .*

Potom fázový portrét rovnice (6.1) obsahuje vlastní přímku příslušnou k λ , která se skládá z kritických bodů rovnice (6.1).

Zbývající orbity jsou rovnoběžky s touto vlastní přímkou. Přitom šipky na orbitách ležících v jedné části poloroviny ohraničené vlastní přímkou mají jeden směr a v druhé části poloroviny mají opačný směr.

Poznámka 6.8 Věta 6.7 neudává směr šipek na orbitách. Ten lze určit z matice \mathbf{A} následujícím způsobem. Nechť

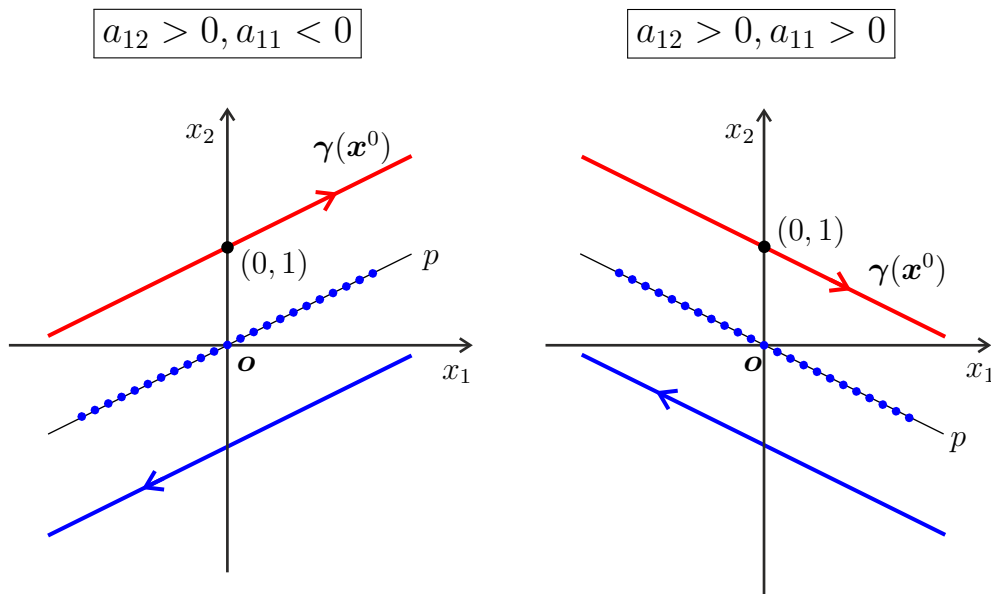
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 0$. Ze vzorce (4.12) pro výpočet vlastních čísel plyne, že v tomto případě je stopa matice $\text{tr } \mathbf{A} = 0$ a rovněž determinant $\det \mathbf{A} = 0$.

- (i) Nechť $a_{12} \neq 0$. Potom vlastní přímku skládající se z kritických bodů rovnice (6.1) lze psát ve tvaru

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1. \quad (6.6)$$

Je-li například $a_{12} > 0$, pak orbity nad přímkou (6.6) mají šipky směřující doprava a orbity pod přímkou (6.6) mají šipky směřující doleva (viz obr. 91).



Obrázek 91: Směr šipek na přímkových orbitách rovnice (6.1) nad a pod přímkou (6.6) (tvořenou kritickými body rovnice (6.1)).

To snadno ověříme, pokud do první rovnice soustavy (6.1) dosadíme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (0, 1)$. Platí

$$x_1'(0) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 = a_{12} > 0,$$

tedy první složka řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ roste v bodě $t = 0$, a proto šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ směřuje doprava. Podobně, je-li $a_{12} < 0$, pak orbity nad přímkou (6.6) mají šipky doleva a orbity pod přímkou (6.6) doprava.

- (ii) Necht' $a_{12} = 0$. Z podmínky $0 = \text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}$ máme $a_{22} = -a_{11}$, a proto z podmínky $0 = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} = -a_{11}^2$, dostáváme $a_{11} = a_{22} = 0$. Tedy z (6.5) plyne $a_{21} \neq 0$ a matice \mathbf{A} má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

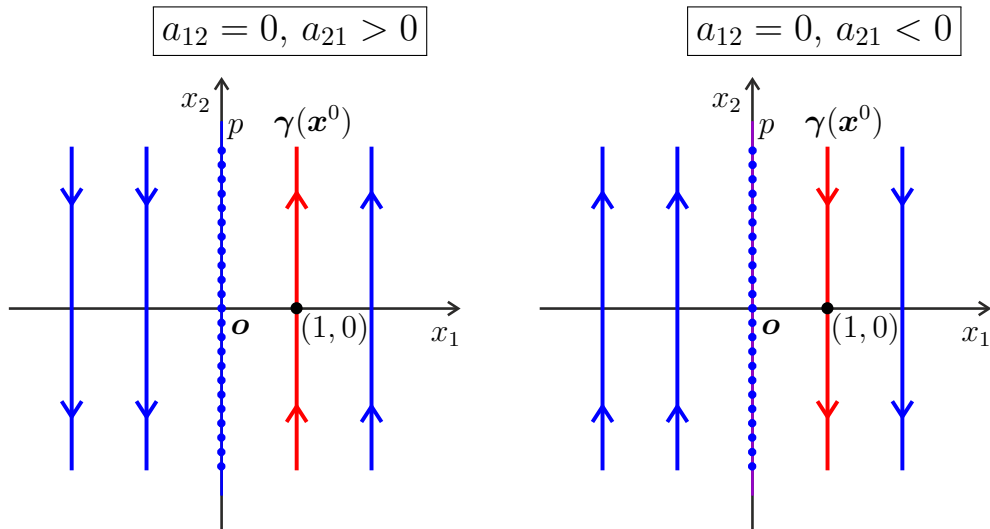
Z rovnice $a_{21}x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ dostáváme vlastní přímku skládající se z kritických bodů rovnice (6.1) a mající tvar

$$x_1 = 0. \tag{6.7}$$

Přímka (6.7) je osa x_2 . V závislosti na znaménku čísla a_{21} má v tomto případě rovnice (6.1) jeden ze dvou fázových portrétů na obrázku 92.

To opět snadno ověříme, pokud do druhé rovnice soustavy (6.1) dosadíme počáteční bod $\mathbf{x}^0 = (1, 0)$. Platí

$$x_2'(0) = a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) = a_{21}x_1(0) = a_{21},$$



Obrázek 92: Dva fázové portréty rovnice (6.1), kdy osa x_2 je tvořena kritickými body.

tedy druhá složka řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ roste v bodě $t = 0$, pokud je $a_{21} > 0$ a klesá, pokud je $a_{21} < 0$. Odsud odvozujeme směry šipek na $\gamma(\mathbf{x}^0)$ a na ostatních orbitách v obou polorovinách.

Nyní se budeme zabývat případy, kdy fázový portrét rovnice (6.2) obsahuje také křivky. To jsou fázové portréty popsané ve větách 5.1, 5.3, 5.4, 5.5 a 5.6. Ukážeme, jak se pomocí matice \mathbf{P} v transformaci (6.4) zobrazí křivky z těchto fázových portrétů na křivky ve fázových portrétech rovnice (6.1). V lineární algebře se dokazuje, že každá lineární transformace (6.4) s regulární maticí \mathbf{P} se dá rozložit na konečný počet elementárních transformací typu

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_1 \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}_2 \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}_3 \mathbf{y},$$

kde

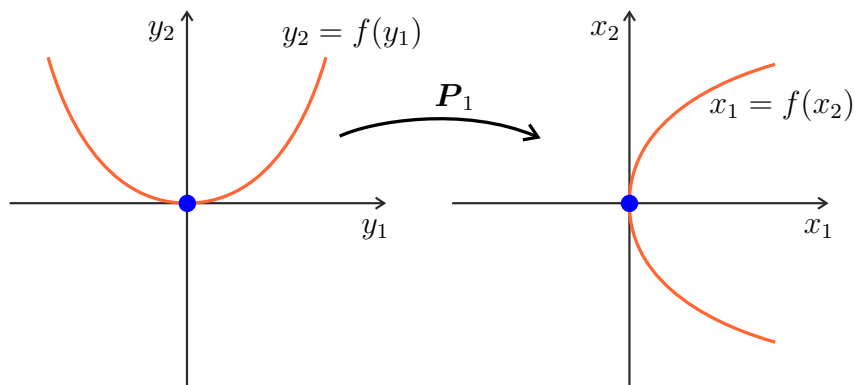
$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 6.9 Uvažujme funkci $y_2 = f(y_1)$ nebo $y_1 = f(y_2)$.

- (i) Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1 \mathbf{y}$ provádí překlopení grafu funkce kolem osy prvního a třetího kvadrantu. Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Například pro funkci $y_2 = f(y_1)$ to můžeme ilustrovat na obrázku 93.



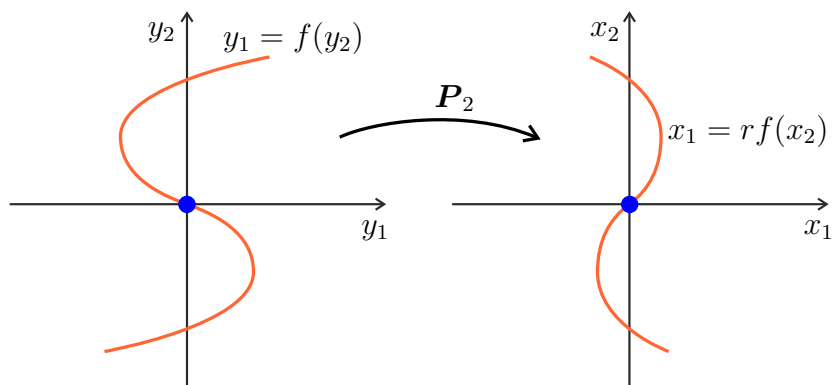
Obrázek 93: Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{y}$ provádí překlacení grafu kolem osy prvního a třetího kvadrantu.

- (ii) Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{y}$ provádí protažení nebo zkrácení grafu funkce ve směru osy y_1 , přičemž je-li $r < 0$ překlápí navíc graf funkce kolem osy y_2 .

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ry_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Například pro $r \in (-1, 0)$ je graf funkce $y_1 = f(y_2)$ transformován jako na obrázku 94.



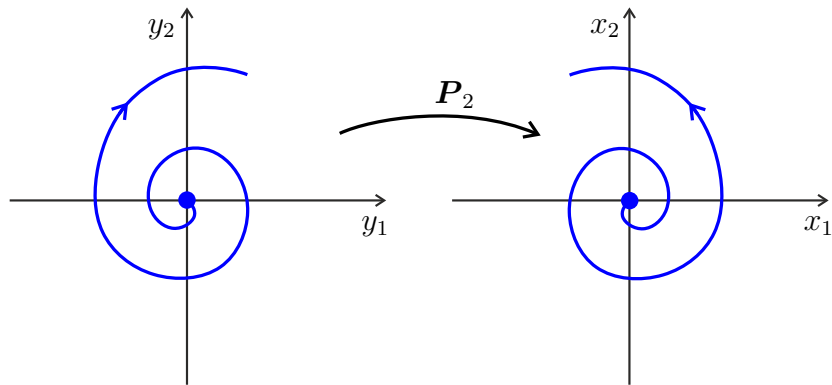
Obrázek 94: Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{y}$ pro $r \in (-1, 0)$.

Nebo pro $r = -1$ je

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

tedy transformace překlápí graf funkce kolem osy y_2 .

Například u spirály to způsobí změnu směru rotace (rotace po směru h.r. se změní na rotaci proti směru h.r., viz obrázek 95).

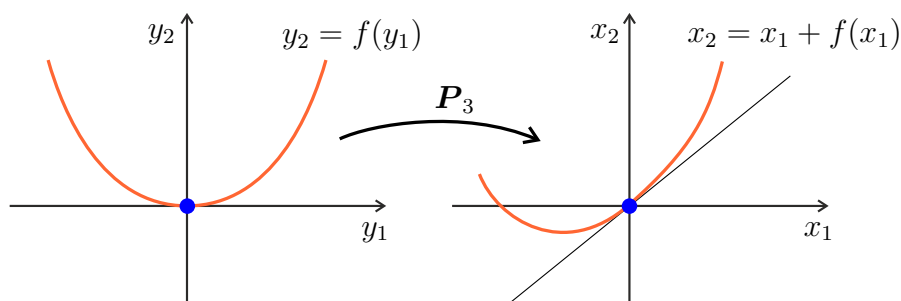


Obrázek 95: Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{y}$ pro $r = -1$ mění směr rotace u spirál.

(iii) Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_3\mathbf{y}$ provádí zkosení grafu funkce. Platí totiž

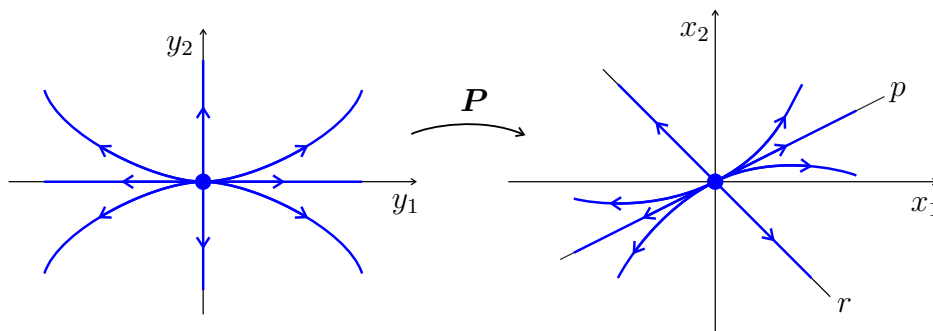
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Tedy rovnice funkce $y_2 = f(y_1)$ přechází na rovnici $x_2 = x_1 + f(x_1)$. Prochází-li graf funkce $y_2 = f(y_1)$ počátkem a má-li tam tečnu o směrnici $f'(0)$, prochází rovněž graf funkce $x_2 = x_1 + f(x_1)$ počátkem a má tam tečnu o směrnici $1 + f'(0)$ (viz obrázek 96).



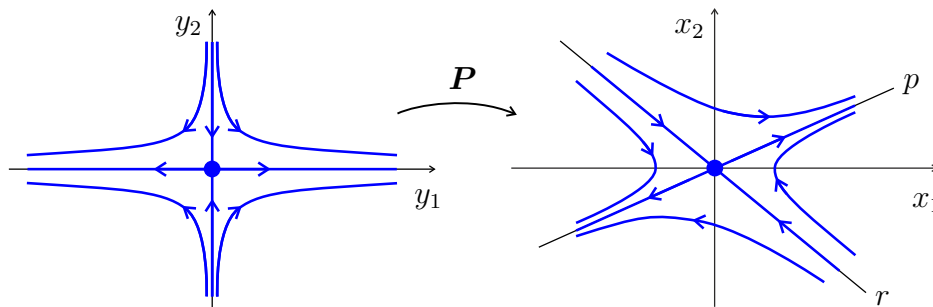
Obrázek 96: Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}_3\mathbf{y}$ provádí zkosení.

Poznámka 6.10 Zvolme libovolnou matici \mathbf{A} a určíme její Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a fázový portrét rovnice (6.2). Podle poznámky 6.9 bude typ fázového portréту rovnice (6.1) stejný jako typ fázového portrétu rovnice (6.2). To znamená, že křivky fázového portrétu rovnice (6.2), které procházejí počátkem a jejichž tečna je osa y_1 nebo y_2 , se zobrazí transformací (6.4) na křivky fázového portrétu rovnice (6.1), které procházejí počátkem a jejichž tečnou je vlastní přímka příslušná k vlastnímu číslu λ_1 matice \mathbf{A} nebo k vlastnímu číslu λ_2 . Viz například obrázek 97, kde vektor \mathbf{p} přísluší $\lambda_1 > 0$ a vektor \mathbf{r} přísluší $\lambda_2 > 0$.



Obrázek 97: Zobrazení křivek fázového portréту pomocí transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$.

Podobně křivky s asymptotami y_1 nebo y_2 se zobrazí na křivky, jejichž asymptotami jsou vlastní přímky příslušné k λ_1 nebo λ_2 . Například zde vektor \mathbf{p} přísluší $\lambda_1 > 0$ a vektor \mathbf{r} k $\lambda_2 < 0$ (viz obrázek 98).



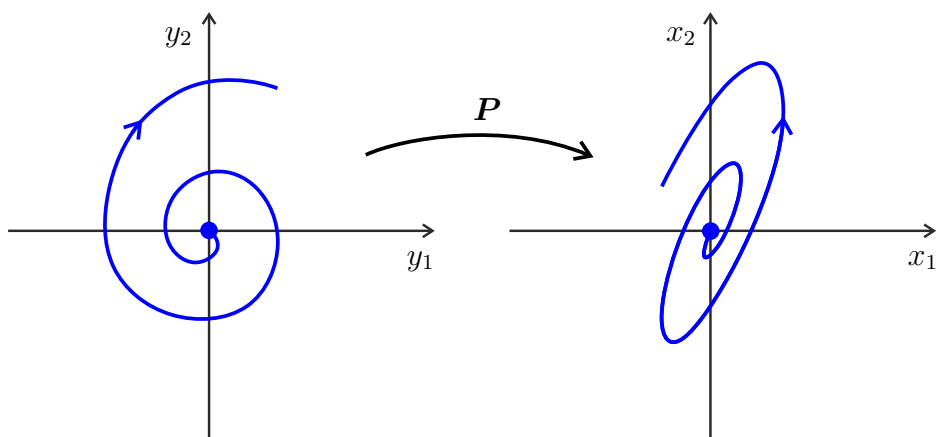
Obrázek 98: Zobrazení křivek fázového portréту pomocí transformace $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$.

Konečně spirály a kružnice ve fázových portrétech rovnice (6.2) přecházejí na spirály a elipsy nebo kružnice ve fázových portrétech rovnice (6.1), přičemž rotace (po směru h.r. nebo proti směru h.r.) ve fázovém portrétu rovnice (6.2) se nemusí shodovat s rotací ve fázovém portrétu rovnice (6.1).

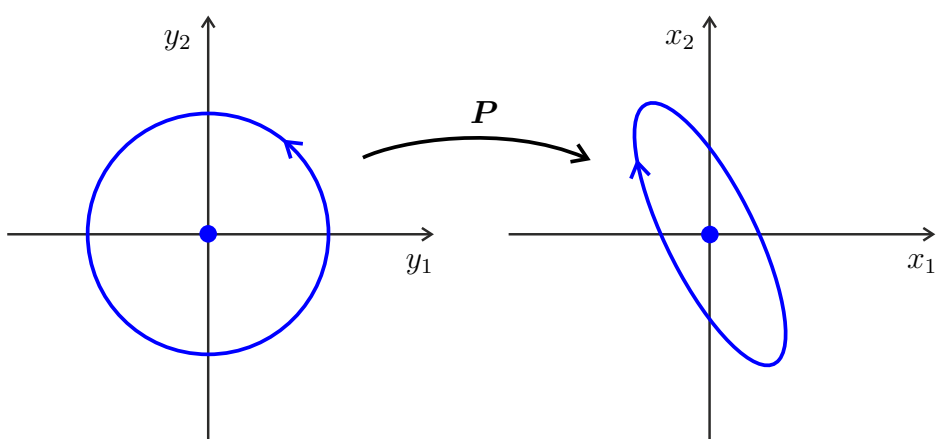
Například spirála rotující po směru h.r. se může transformací (6.4) zobrazit na spirálu rotující proti směru h.r. (viz obrázek 99).

Nebo kružnice rotující proti směru h.r. se může zobrazit na elipsu rotující po směru h.r. (viz obrázek 100).

K určení přibližného tvaru spirály nebo elipsy ve fázovém portrétu rovnice (6.1) lze užít *metodu izoklin*.



Obrázek 99: Zobrazení křivek fázového portrétu pomocí transformace $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.



Obrázek 100: Zobrazení křivek fázového portrétu pomocí transformace $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

Definice 6.11 Necht' matice \mathbf{A} má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Potom přímku o rovnici

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \tag{6.8}$$

nazveme *první izoklinou rovnice (6.1)*.

Přímku o rovnici

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \tag{6.9}$$

nazveme *druhou izoklinou rovnice (6.1)*.

Vidíme, že kritický bod $(0, 0)$ je průsečík první a druhé izokliny.

Metoda izoklin

- Necht' \mathbf{A} je regulární matice, tj. rovnice (6.1) má jediný kritický bod $(0, 0)$.

- (i) Necht' $a_{12} \neq 0$. Potom první izoklina (6.8) je různá od osy x_2 a lze ji zapsat ve tvaru

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Zvolme bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \neq (0, 0)$ na první izoklině, tj. platí $x_2^0 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1^0$. Nyní uvažujme řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$ rovnice (6.1) splňující podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, tj. $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Z první rovnice v soustavě (6.1) plyne, že

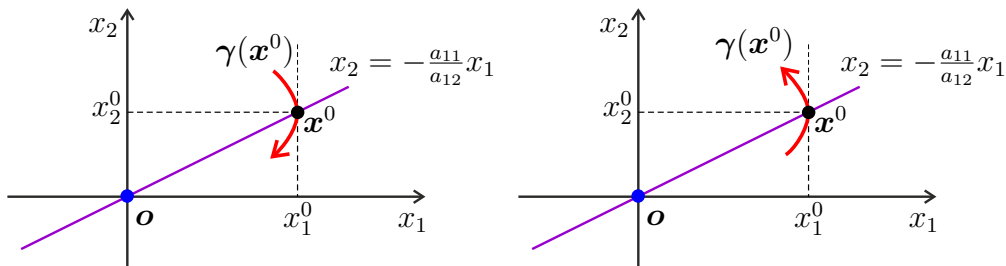
$$x_1'(0) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = 0.$$

Proto orbita $\gamma(\mathbf{x}^0)$, která protíná první izoklinu v bodě \mathbf{x}^0 má v tomto průsečíku svislou tečnu. Část orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ může tedy vypadat jako na obrázku 101.

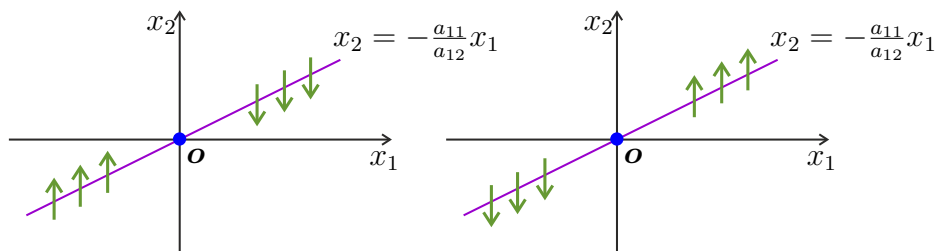
Směrové pole rovnice (6.1), které se skládá z tečných elementů k orbitám, má na první izoklině jeden z tvarů jako na obrázku 102, neboť

$$x_2'(0) = a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) = -\frac{\det \mathbf{A}}{a_{12}}x_1^0,$$

kde $-\frac{\det \mathbf{A}}{a_{12}}$ je konstanta. Tedy, pokud pro $x_1^0 > 0$ směřuje pole nahoru (dolů), musí pro $x_1^0 < 0$ směřovat dolů (nahoru).



Obrázek 101: Svislá tečna k orbitě v průsečíku s izoklinou.

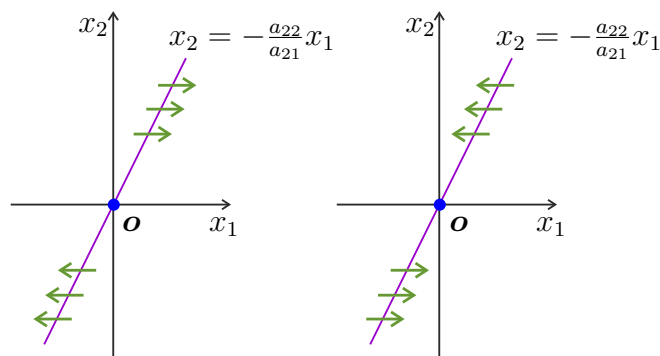


Obrázek 102: Směrové pole na první izoklině.

- (ii) Necht' $a_{21} \neq 0$. Potom druhá izoklina (6.9) je různá od osy x_1 a lze ji zapsat ve tvaru

$$x_1 = -\frac{a_{22}}{a_{21}}x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Orbita protínající druhou izoklinu má v tomto průsečíku vodorovnou tečnu. Směrové pole rovnice (6.1) má na druhé izoklině jeden z tvarů jako na obrázku 103.



Obrázek 103: Směrové pole na druhé izoklině.

- Necht' $\mathbf{A} = \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Potom první izoklinou rovnice (6.1) je přímka $x_2 = -\lambda x_1$ a druhou izoklinou je osa x_1 .

• Necht' $\mathbf{A} = \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0.$$

Potom první izoklinou rovnice (6.1) je přímka

$$x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$$

Druhous izoklinou je přímka

$$x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} x_1$$

pro $\alpha \neq 0$. Je-li $\alpha = 0$, pak je druhou izoklinou přímka $x_1 = 0$.

Speciálně pro $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ je první izoklinou osa x_1 a druhou izoklinou osa x_2 .

• Obsahuje-li fázový portrét rovnice (6.1) spirály, elipsy nebo kružnice, lze směr jejich rotace stanovit přímo z matice \mathbf{A} .

Z vět 5.5, 5.6 a z poznámky 6.10 plyne, že tento případ nastane, pokud má matice \mathbf{A} vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0.$$

Tedy ze vzorce (4.12) pro výpočet vlastních čísel vyplývá, že matice \mathbf{A} musí splňovat podmínku

$$(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A} < 0,$$

tj.

$$(a_{11} + a_{22})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Po úpravě máme

$$(a_{11} - a_{22})^2 < -4a_{12}a_{21},$$

což zejména znamená, že musí platit $a_{12}a_{21} < 0$.

(a) Necht' $a_{12} > 0$. Zvolme bod $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ na kladné poloose x_2 , tj.

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 > 0$$

a uvažujme řešení

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$$

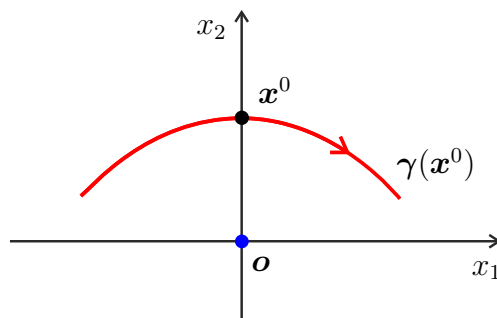
rovnice (6.1) splňující podmínku

$$\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = \mathbf{x}^0.$$

Potom z první rovnice v soustavě (6.1) dostáváme

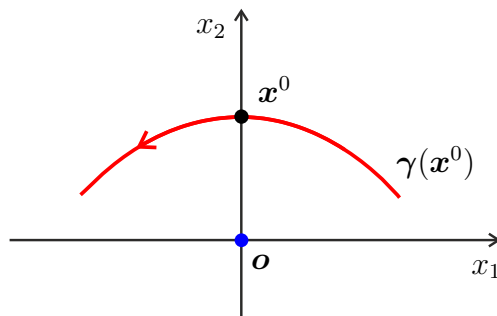
$$x_1'(0) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = a_{12}x_2^0 > 0.$$

Tedy první složka $x_1(t)$ řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ roste v bodě $t = 0$, a proto šipka na orbitě $\gamma(\mathbf{x}^0)$ směřuje v bodě \mathbf{x}^0 doprava (viz obrázek 104). Rotace orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$ bude po směru h.r.



Obrázek 104: Část orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$.

- (b) *Nechť* $a_{12} < 0$. Stejným způsobem odvodíme rotaci proti směru h.r. (viz obrázek 105).



Obrázek 105: Část orbity $\gamma(\mathbf{x}^0)$.

Poznámka 6.12 Dokázali jsme následující výsledek.

Má-li matice \mathbf{A} komplexně sdružená vlastní čísla a splňuje-li její koeficient a_{12} nerovnost

$$a_{12} > 0 \quad (a_{12} < 0),$$

rotují orbity rovnice (6.1) po směru (proti směru) h. r.

Na základě uvedených poznatků jsme nyní schopni rozhodnout o typu fázového portréту rovnice (6.1) s libovolnou maticí \mathbf{A} pomocí vlastních čísel λ_1, λ_2 této matice.

Nejprve rozdělíme matice na dvě základní skupiny.

Definice 6.13 Matici \mathbf{A} nazveme *hyperbolickou*, jestliže její vlastní čísla mají nenulové reálné části. V opačném případě nazveme matici \mathbf{A} *nehyperbolickou*.

Protože zde pracujeme s dvourozměrnými maticemi \mathbf{A} , které mají dvě vlastní čísla λ_1, λ_2 (mohou splývat), platí:

- \mathbf{A} je hyperbolická, právě když
 buď $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ nebo $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$.
- \mathbf{A} je nehyperbolická, právě když
 buď $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 0$ nebo $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

Definice 6.14 Kritický bod rovnice (6.1) s hyperbolickou maticí \mathbf{A} nazveme *hyperbolický*. Kritický bod rovnice (6.1) s nehyperbolickou maticí \mathbf{A} nazveme *nehyperbolický*.

Věta 6.15 Je-li matice \mathbf{A} v rovnici (6.1) hyperbolická, potom má rovnice (6.1) jediný (hyperbolický) kritický bod $(0, 0)$.

Důkaz. Je-li matice \mathbf{A} hyperbolická, pak je regulární, tj.

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \quad (6.10)$$

Kdyby totiž platilo $\det \mathbf{A} = 0$, potom bychom ze vzorce

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2} \quad (6.11)$$

dostali jedno z čísel λ_1, λ_2 nulové, a tedy \mathbf{A} by byla nehyperbolická. Kritický bod rovnice (6.1) je řešením lineární soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Z (6.10) plyne, že tato soustava má pouze triviální řešení. \square

Poznámka 6.16 Je-li matice \mathbf{A} v rovnici (6.1) nehyperbolická, potom rovnice (6.1) má buď jediný (nehyperbolický) kritický bod $(0, 0)$ nebo má nekonečně mnoho (nehyperbolických) kritických bodů. První případ nastane pokud $\det \mathbf{A} > 0$ a $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$ a z (6.11) dostaneme ryze imaginární vlastní čísla matice \mathbf{A}

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det \mathbf{A}}.$$

Druhý případ nastane, je-li \mathbf{A} singulární, tj. $\det \mathbf{A} = 0$ a matice má $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Ze vzorce (6.11) vyplývá, že vlastní čísla λ_1, λ_2 jsou jednoznačně určena stopou matice \mathbf{A} a jejím determinantem. Můžeme proto uvést následující klasifikaci fázových portrétů rovnice (6.1) pomocí hodnot $\text{tr } \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{A}$.

Klasifikace fázových portrétů rovnice (6.1)

Nejprve předpokládejme, že \mathbf{A} je hyperbolická matice. Potom se fázové portréty rovnice (6.1) dělí na následující třídy a typy:

Třída I

se nazývá *zřídlo* a je charakterizována nerovnostmi

$$\det \mathbf{A} > 0, \quad \text{tr } \mathbf{A} > 0. \quad (6.12)$$

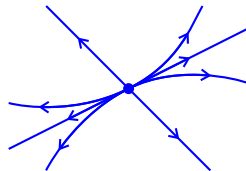
V této třídě existují čtyři typy fázových portrétů:

Ia) *Typ uzal-zřídlo se dvěma vlastními přímkami.*

Je charakterizován nerovností

$$4 \det \mathbf{A} < (\text{tr } \mathbf{A})^2. \quad (6.13)$$

Pak $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

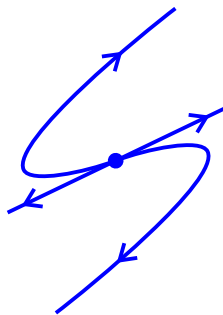


Ib) *Typ uzal-zřídlo s jednou vlastní přímkou.*

Je charakterizován podmínkami

$$4 \det \mathbf{A} = (\text{tr } \mathbf{A})^2, \quad \mathbf{A} \text{ není diagonální.} \quad (6.14)$$

Pak $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

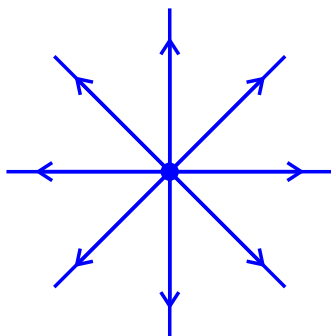


Ic) *Typ uzal-zřídlo se samými vlastními přímkami.*

Je charakterizován podmínkami

$$4 \det \mathbf{A} = (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2, \quad \mathbf{A} \text{ je diagonální.} \quad (6.15)$$

Pak $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

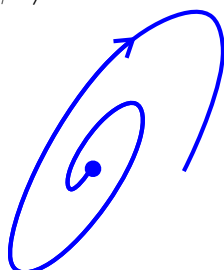


Id) *Typ ohnisko-zřídlo.*

Je charakterizován nerovností

$$4 \det \mathbf{A} > (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2. \quad (6.16)$$

Pak $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.



Poznámka 6.17 Kritický bod $(0,0)$ se u typů Ia), Ib), Ic) nazývá *uzal-zřídlo*, u typu Id) se nazývá *ohnisko-zřídlo*. Tento bod je nestabilní.

Třída II

se nazývá *výlevka* a je charakterizována nerovnostmi

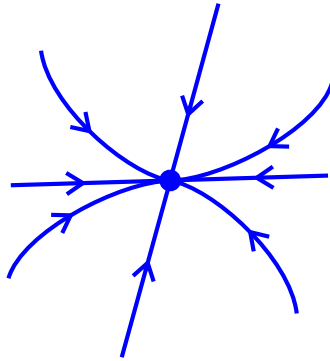
$$\det \mathbf{A} > 0, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} < 0. \quad (6.17)$$

V této třídě existují čtyři typy fázových portrétů.

IIa) *Typ uzal-výlevka se dvěma vlastními přímkami.*

Je charakterizován nerovností (6.13).

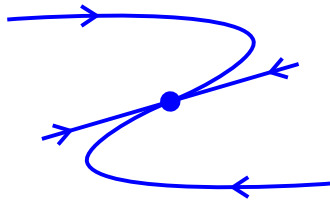
Pak $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.



IIb) *Typ uzal-výlevka s jednou vlastní přímkou.*

Je charakterizován podmínkami (6.14).

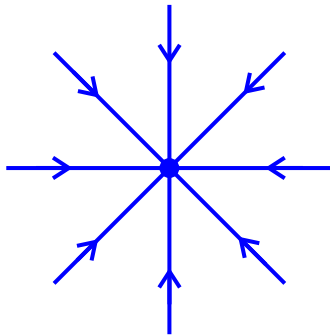
Pak $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.



IIc) *Typ uzal-výlevka se samými vlastními přímkami.*

Je charakterizován podmínkami (6.15).

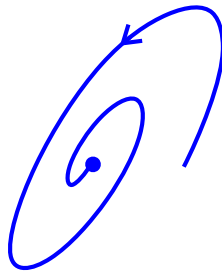
Pak $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.



IIId) *Typ ohnisko-výlevka.*

Je charakterizován nerovností (6.16).

Pak $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$.



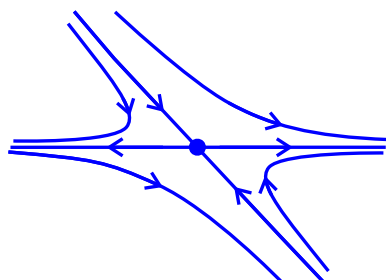
Poznámka 6.18 Kritický bod $(0,0)$ se u typů IIa), IIb), IIc) nazývá *uzel-výlevka*, u typu IId) se nazývá *ohnisko-výlevka*. Tento bod je asymptoticky stabilní.

Třída III

se nazývá *sedlo* a je charakterizována nerovností

$$\det \mathbf{A} < 0. \quad (6.18)$$

Pak $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.



Poznámka 6.19 Kritický bod $(0,0)$ se u třídy III nazývá *sedlo* a je nestabilní.

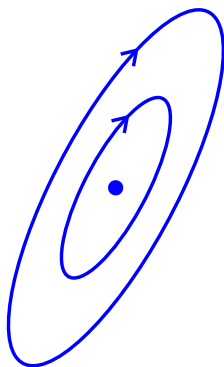
Nyní předpokládejme, že \mathbf{A} je nehyperbolická matice. Potom se fázové portréty rovnice (6.1) dělí na následující třídy.

Třída IV

se nazývá *střed* a je charakterizována podmínkami

$$\det \mathbf{A} > 0, \quad \text{tr } \mathbf{A} = 0. \quad (6.19)$$

Pak $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.



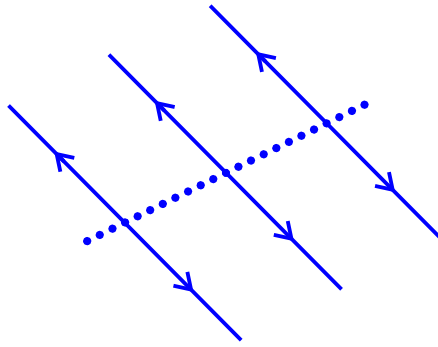
Kritický bod $(0,0)$ se u třídy IV nazývá *střed* a je stabilní. Není ale asymptoticky stabilní.

Třída V

se nazývá *přímka nestabilních kritických bodů* a je charakterizována podmínkami

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad \text{tr } \mathbf{A} > 0. \quad (6.20)$$

Pak $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$.

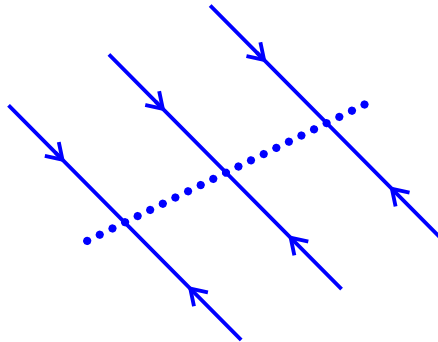


Třída VI

se nazývá *přímka stabilních kritických bodů* a je charakterizována podmínkami

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad \text{tr } \mathbf{A} < 0. \quad (6.21)$$

Pak $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$.



Třída VII

se nazývá *degenerovaný fázový portrét* a je charakterizován podmínkami

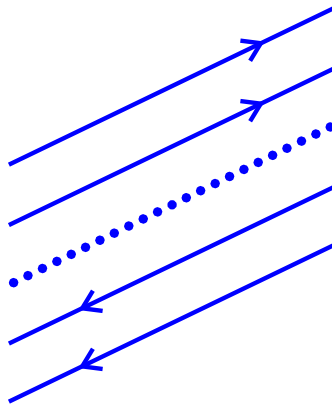
$$\det \mathbf{A} = 0, \quad \text{tr } \mathbf{A} = 0. \quad (6.22)$$

V této třídě existují dva typy fázových portrétů.

VIIa) *Typ degenerovaný portrét s přímkou kritických bodů.*

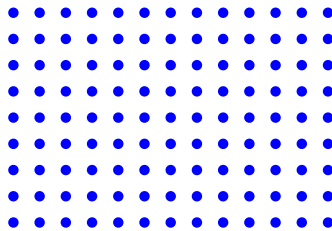
Je charakterizován podmínkou, že \mathbf{A} není nulová matice.

Pak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Všechny kritické body na přímce jsou nestabilní.



VIIb) Tento typ obsahuje pouze nulovou matici.

Pak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Všechny kritické body v rovině jsou stabilní.



Poznámka 6.20 Ukázali jsme, jak z hodnot $\text{tr } \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{A}$ lze rozhodnout o třídě a typu fázového portréту rovnice (6.1). Abychom ale přesněji určili tvar křivkových orbit a polohu přímkových orbit, potřebujeme získat z matice \mathbf{A} další informace. K tomu účelu hledáme vlastní přímky a izokliny, které jsou zavedeny v definicích 6.3 a 6.11.

- *Vlastní přímky* jsou částí fázového portréту (tj. skládají se z orbit), existují pouze v případě reálných vlastních čísel a rozdělují fázovou rovinu na části, v nichž mají křivkové orbity rovnice (6.1) podobné tvary. Navíc mohou být tečnami nebo asymptotami jiných orbit. Nazýváme je rovněž *separátory*.
- *Izokliny* nejsou obvykle částí fázového portrétu. Jsou to přímky, které rozdělují fázovou rovinu na čtyři části. V každé z částí mají derivace první a druhé složky řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$ konstantní znaménko. Tedy funkce $x_1(t)$ nebo $x_2(t)$ ve zvolené části buď stále roste, nebo stále klesá.
- Užití vlastních přímek a izoklin k upřesnění tvaru fázového portrétu rovnice (6.1) je vysvětleno v poznámce 6.10 a v metodě izoklin za definicí 6.11. Budeme to ještě ilustrovat na několika příkladech.

Příklad 6.21 (Pokračování příkladu 4.3)

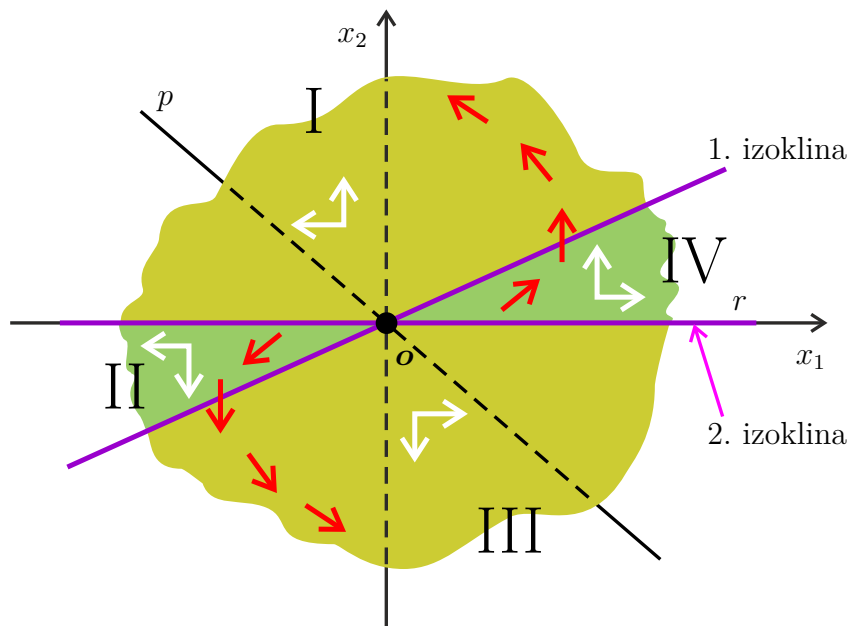
1. Určíme třídu a typ fázového portréту soustavy

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) = 3x_2(t). \end{cases} \quad (6.23)$$

Zde je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, tedy $\det \mathbf{A} = 3$ a $\text{tr } \mathbf{A} = 4$.

Platí (6.12), a proto fázový portrét rovnice (6.23) patří do třídy I. Protože $4 \det \mathbf{A} = 12$ a $(\text{tr } \mathbf{A})^2 = 16$, podle (6.13) typ fázového portréту je *Ia) uzel-zřídlo se dvěma vlastními přímkami*.

2. Určíme tvar fázového portréту rovnice (6.23). V příkladu 4.3 jsme našli vlastní čísla matice \mathbf{A} a ukázali, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ přísluší vlastní vektor $\mathbf{p} = (1, -1)^T$, k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ přísluší vlastní vektor $\mathbf{r} = (1, 0)^T$. Tedy vlastní přímky rovnice (6.23) procházejí počátkem a mají směr vektorů \mathbf{p} a \mathbf{r} . Dále má rovnice (6.23) první izoklinu o rovnici $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ a druhou izoklinu o rovnici $x_2 = 0$. Tedy osa x_1 je současně vlastní přímkou a druhou izoklinou.

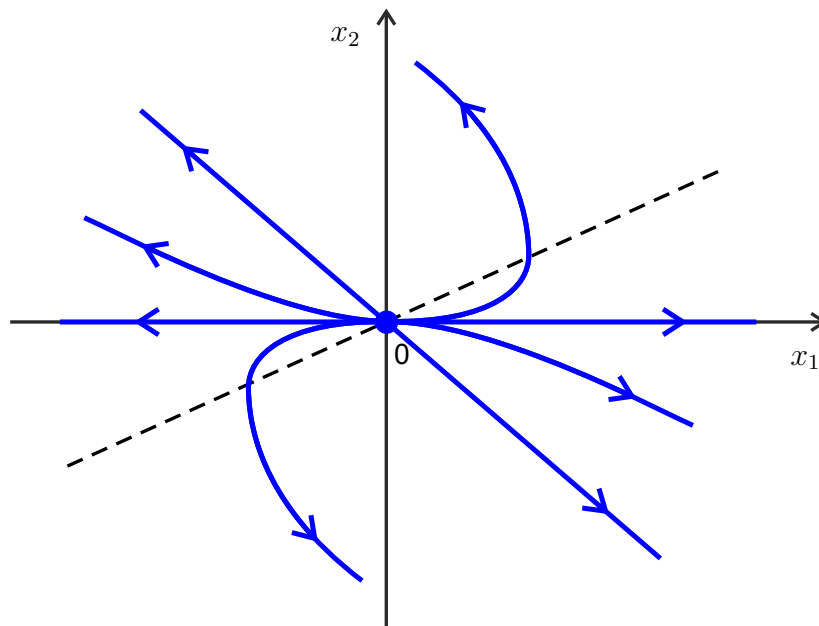


Obrázek 106: Fázová rovina rovnice (6.23) je rozdělena na čtyři oblasti pomocí izoklin.

Izokliny dělí fázovou rovinu na oblasti I, II, III, IV (viz obrázek 106).

V oblasti I platí $x_1 - 2x_2 < 0$ a $x_2 > 0$, a proto z (6.23) plyne $x_1'(t) < 0$ a $x_2'(t) > 0$. To značí, že v oblasti I funkce $x_1(t)$ klesá a funkce $x_2(t)$ roste.

To znázorníme dvojicí šipek, z nichž vodorovná směřuje doleva a svislá směřuje nahoru. Podobně určíme dvojice šipek v oblastech II, III a IV. Tím získáme představu o směrovém poli v jednotlivých oblastech a přibližném tvaru křivkových orbit, které se dotýkají osy x_1 (vlastní přímky ve směru \mathbf{r}). Fázový portrét je načrtnut na obrázku 107.



Obrázek 107: Fázový portrét rovnice (6.23).

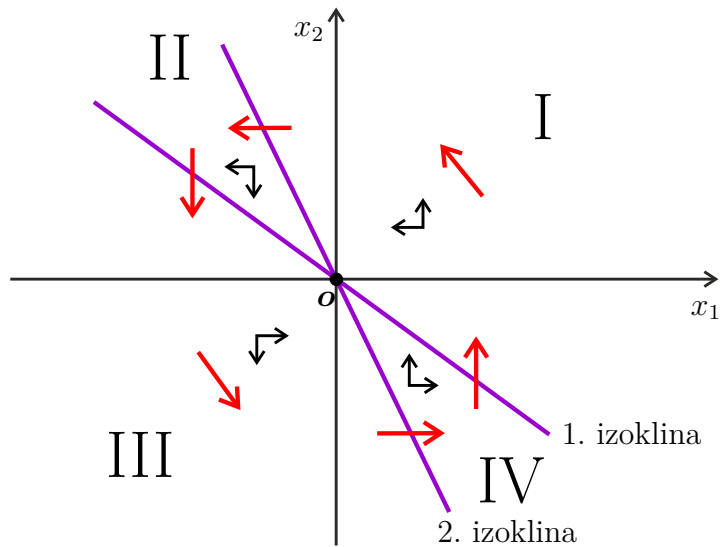
Příklad 6.22 (Pokračování příkladu 4.4)

1. Určíme třídu a typ fázového portréту vektorové rovnice

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) = 10x_1(t) + 5x_2(t). \end{cases} \quad (6.24)$$

Zde je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 5$, $\text{tr } \mathbf{A} = 4$. Platí (6.12), a proto je fázový portrét rovnice (6.24) třídy I. Protože $4 \det \mathbf{A} = 20$ a $(\text{tr } \mathbf{A})^2 = 16$, platí (6.16) a typ fázového portréту je *Id* ohnisko-zřídlo.

2. Určíme tvar fázového portréту rovnice (6.24). V příkladu 4.4 jsme našli $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Reálné vlastní vektory ani vlastní přímky rovnice (6.24) neexistují. Fázový portrét má kromě kritického bodu $(0, 0)$ pouze křivkové orbity ve tvaru spirál. Přesnější tvar spirál určíme pomocí izoklin. První izoklina má rovnici $x_2 = -x_1$, druhá izoklina rovnici $x_2 = -2x_1$. Růst či klesání složek $x_1(t)$ a $x_2(t)$ řešení rovnice (6.24) a z toho odvozené směrové pole v jednotlivých oblastech I, II, III a IV vypadá jako na obrázku 108.



Obrázek 108: Směrové pole rovnice (6.24) je rozdělena na čtyři oblasti pomocí izoklin.

Rotaci spirály lze rovněž určit ze znaménka a_{12} . Zde je $a_{12} = -1$, což podle poznámky 6.12 značí rotaci proti směru h.r. (viz obrázek 109).

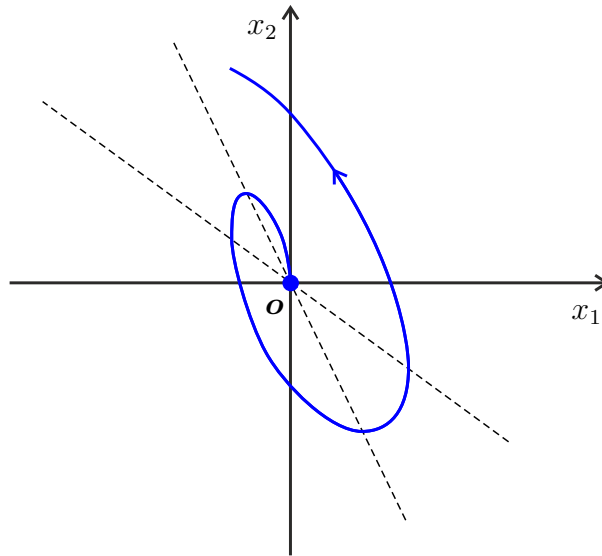
Příklad 6.23 (Pokračování příkladu 4.5)

1. Určíme třídu a typ fázového portréту vektorové rovnice

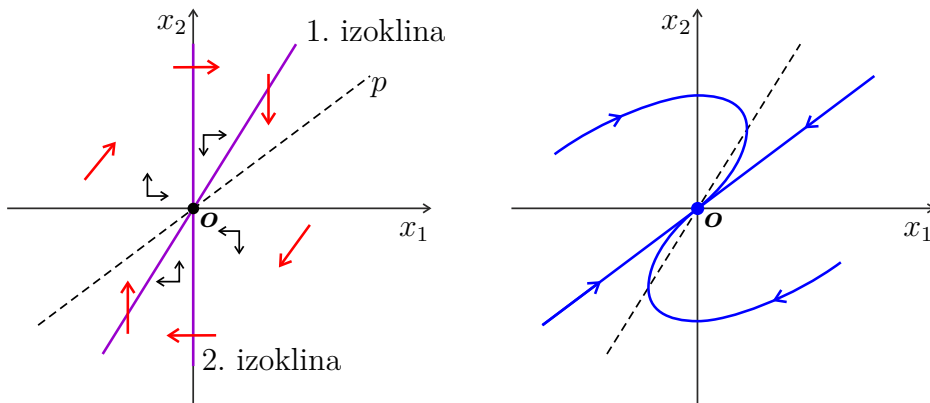
$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + 4x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases} \quad (6.25)$$

Zde je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 4$, $\text{tr } \mathbf{A} = -4$. Platí (6.17), a proto fázový portrét rovnice (6.25) patří do třídy II. Protože $4 \det \mathbf{A} = 16$ a $(\text{tr } \mathbf{A})^2 = 16$, platí (6.14) a typ fázového portréту je *IIb) uzel-výlevka s jednou vlastní přímkou*.

2. Určíme tvar fázového portréту rovnice (6.25). V příkladu 4.5 jsme našli vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -2$ a vlastní vektor $\mathbf{p} = (2, 1)^T$ příslušný k $\lambda_1 = -2$. Ve fázovém portrétu je jedna vlastní přímka procházející počátkem a mající směr \mathbf{p} . Ostatní orbity (kromě počátku) leží na křivkách procházejících počátkem a dotýkajících se v něm vlastní přímky. Přesnější tvar křivkových orbit najdeme pomocí izoklin. První izoklina má rovnici $x_2 = x_1$, druhá izoklina má rovnici $x_1 = 0$. Příslušné směrové pole rovnice (6.25) a její fázový portrét jsou naznačeny na obrázku 110.



Obrázek 109: Fázový portrét rovnice (6.24).



Obrázek 110: Směrové pole (vlevo) a fázový portrét (vpravo) rovnice (6.25).

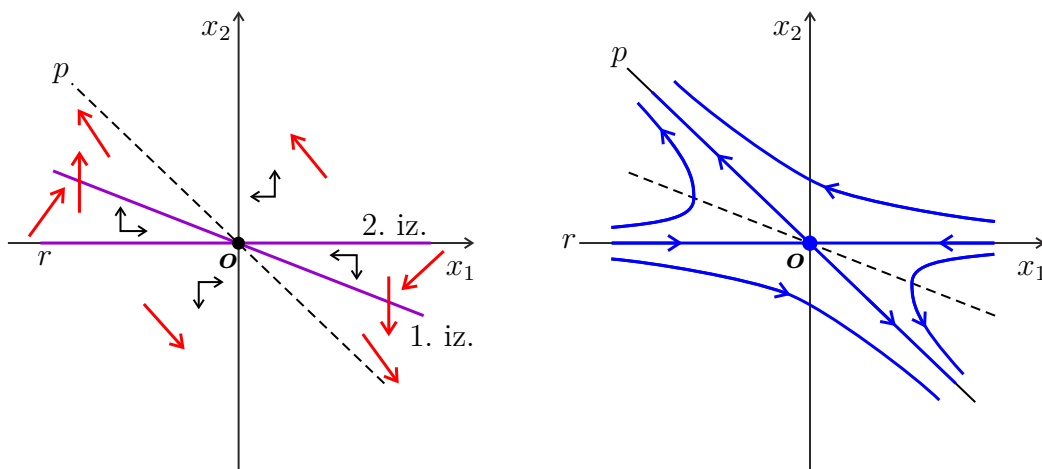
Příklad 6.24 1. Určíme třídu a typ fázového portréту vektorové rovnice

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t), \\ x_2'(t) = 2x_2(t). \end{cases} \quad (6.26)$$

Zde je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = -2$ a $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1$. Platí (6.18), a proto fázový portrét rovnice (6.26) patří do třídy *III*, *sedlo*.

2. Určíme tvar fázového portréту rovnice (6.26). Matice \mathbf{A} má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, vlastní vektor $\mathbf{p} = (1, -1)^T$ příslušný k λ_1 , vlastní vektor $\mathbf{r} = (1, 0)^T$ příslušný k λ_2 .

Ve fázovém portrétu jsou dvě vlastní přímky protínající se v počátku a mající směr vektorů \mathbf{p} a \mathbf{r} . Ostatní orbity, kromě kritického bodu $(0, 0)$, jsou křivky, jejichž asymptotami jsou vlastní přímky. Pro upřesnění tvaru křivek a náčrt směrového pole ještě určíme izokliny. První izoklina má rovnici $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$, druhá izoklina má rovnici $x_2 = 0$. Osa x_1 je zde proto současně vlastní přímkou a druhou izoklinou. Příslušné směrové pole rovnice (6.26) a její fázový portrét jsou naznačeny na obrázku 111.



Obrázek 111: Směrové pole (vlevo) a fázový portrét (vpravo) rovnice (6.26).

7 Planární nelineární dynamické systémy



Cílem této kapitoly je naučit se

- určovat hyperbolické kritické body planárních nelineárních systémů,
- určovat stabilitu těchto kritických bodů,
- určovat lokální fázové portréty v okolí těchto kritických bodů.

Položíme-li v definicích a větách kapitoly 1 dimenzi n rovnu 2, dostáváme planární dynamické systémy, které vznikají ze soustavy dvou autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (7.1)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ má spojité parciální derivace na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Ekvivalentní vektorový zápis systému (7.1) má tvar

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (7.2)$$

Podle definice 1.18 je bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$ kritickým bodem rovnice (7.2), právě když platí

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \quad f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0.$$

Rozlišujeme dva základní typy kritických bodů.

Definice 7.1 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (7.2) se nazývá *hyperbolický* (HKB), má-li Jacobiho matice

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

obě vlastní čísla s nenulovými reálnými složkami.

Definice 7.2 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ rovnice (7.2) se nazývá *nehyperbolický* (NKB), má-li Jacobiho matice (7.3) aspoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou složkou.

Vidíme, že definice 7.1 a 7.2 jsou v souladu s definicí 2.4 pro skalární dynamické systémy.

Poznámka 7.3 Podle definice 6.13 je $\bar{\mathbf{x}}$ HKB, právě když matice (7.3) je hyperbolická a $\bar{\mathbf{x}}$ je NKB, právě když matice (7.3) je nehyperbolická. Připomeňme, že vlastní čísla hyperbolické matice (7.3) splňují jednu z následujících dvou podmínek:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$
- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0.$

Naproti tomu vlastní čísla nehyperbolické matice (7.3) splňují jednu ze tří podmínek:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0,$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,$
- $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$

V kapitole 4 jsme ukázali, že speciálním případem systému (7.1) resp. rovnice (7.2) je systém (4.1) resp. rovnice (4.2), kde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. V tomto případě je Jacobiho matice funkce \mathbf{f} konstantní a platí $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$. Tedy definice 7.1 je v souladu s definicí 6.14.

Příklad 7.4 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_1^3(t). \end{cases} \quad (7.4)$$

Kritické body systému (7.4) jsou řešení soustavy rovnic

$$x_2 = 0, \quad x_1 - x_1^3 = 0.$$

Odsud dostáváme tři kritické body

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, 0), \quad \hat{\mathbf{x}} = (1, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (-1, 0).$$

Jacobiho matice systému (7.4) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 1$, a tedy je hyperbolická. Proto $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ je HKB.

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, a tedy je nehyperbolická. Proto $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0)$ je NKB.

- Protože

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

je $\tilde{\mathbf{x}} = (-1, 0)$ NKB.

Příklad 7.5 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1^3(t) + 4x_2(t). \end{cases} \quad (7.5)$$

Kritické body systému (7.5) jsou řešení soustavy rovnic

$$x_1 - 2x_1x_2 = 0, \quad x_1^3 + 4x_2 = 0.$$

Odsud dostáváme dva kritické body

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, 0), \quad \hat{\mathbf{x}} = (-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}).$$

Jacobiho matice systému (7.5) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 & -2x_1 \\ 3x_1^2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, a tedy je hyperbolická. Proto $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ je HKB.

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt[3]{2} \\ 3\sqrt[3]{4} & 4 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$, a tedy je hyperbolická.

Proto $\hat{\mathbf{x}} = (-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2})$ je HKB.

Dále se budeme zabývat pouze hyperbolickými kritickými body rovnice (7.2) a naučíme se určovat typ jejich stability ve smyslu definic 1.23–1.25.

V kapitole 6 jsme vyšetřovali kritický bod $(0, 0)$ rovnice (6.1) a v závislosti na vlastních číslech matice \mathbf{A} jsme stanovili typ stability tohoto kritického bodu. Viz poznámky 6.17–6.19 týkající se hyperbolické matice \mathbf{A} . Tyto výsledky nyní přeneseme na rovnici (7.2).

K tomuto přenosu potřebujeme nejprve definovat dva klíčové pojmy — „lineární variační rovnice“ a „topologická ekvivalence“.

Definice 7.6 Necht' $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je kritický bod rovnice (7.2).

Rovnice

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} \quad (7.6)$$

se nazývá *lineární variační rovnice* k rovnici (7.2) v bodě $\bar{\mathbf{x}}$.

Rovnice (7.6) má ve složkách tvar

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)y_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)y_2(t), \\ y_2'(t) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)y_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)y_2(t). \end{cases}$$

Vidíme, že se jedná o rovnici (6.1), v níž $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$.

Tedy rovnice (7.6) má kritický bod $(0, 0)$ a platí pro ni klasifikace fázových portrétů z kapitoly 6.

Příklad 7.7 (Pokračování příkladu 7.4) Lineární variační rovnice k rovnici (7.4) v bodě $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ má tvar

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Lineární variační rovnice k rovnici (7.4) v bodě $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0)$ má tvar

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Lineární variační rovnice k rovnici (7.4) v bodě $\tilde{\mathbf{x}} = (-1, 0)$ má tvar

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Nyní uvažujme rovnici

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)), \quad (7.7)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ má spojité parciální derivace na otevřené podmnožině $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$.

Definice 7.8 Necht' $U \subset G$ a $V \subset \tilde{G}$ jsou otevřené množiny. Rovnice (7.2) na U se nazývá *topologicky ekvivalentní* s rovnicí (7.7) na V , jestliže existuje homeomorfismus $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ takový, že substituce $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ transformuje rovnici (7.2) na rovnici (7.7).

To znamená, že orbity rovnice (7.2) ležící v U jsou jednoznačně spojitě zobrazeny na orbity rovnice (7.7) ležící ve V , přičemž parametrizace (směr šipek na orbitách) zůstává zachována.

Věta 7.9 (Grobman–Hartman, Lokální topologická ekvivalence) *Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je HKB rovnice (7.2). Pak existuje okolí $U \subset G$ bodu $\bar{\mathbf{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^2$ bodu $(0, 0)$ tak, že rovnice (7.2) na U je topologicky ekvivalentní s lineární variační rovnicí (7.6) na V .*

Důkaz. Lze jej najít například v monografii [6, str. 120–123]. \square

Topologickou ekvivalenci z věty 7.9 nazveme *lokální topologická ekvivalence*, protože homeomorfismus \mathbf{h} operuje pouze na okolicích U a V uvažovaných kritických bodů, tj. $\mathbf{h} : U \rightarrow V$.

Speciálně pro dva lineární systémy platí následující věta.

Věta 7.10 (Globální topologická ekvivalence) *Nechť \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou hyperbolické matice. Potom rovnice $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ je na \mathbb{R}^2 topologicky ekvivalentní s rovnicí $\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}$ na \mathbb{R}^2 , právě když vlastní čísla obou matic mají stejný počet kladných a stejný počet záporných reálných složek.*

Důkaz. Viz například monografii [2, str. 243–246]. \square

Topologickou ekvivalenci z věty 7.10 nazveme *globální topologická ekvivalence*, protože homeomorfismus \mathbf{h} operuje na celých fázových rovinách, tj. $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Z klasifikace fázových portrétů rovnice (6.1) a věty 7.10 vyplývá, že množina všech rovnic (6.1) s hyperbolickou maticí se rozpadá na tři třídy topologické ekvivalence:

třída I — zřídlo,

třída II — výlevka,

třída III — sedlo.

Libovolné dvě rovnice (6.1) z jedné třídy jsou globálně topologicky ekvivalentní.

Z klasifikace fázových portrétů rovnice (7.6), poznámek 6.17–6.19 a z věty 7.9 dostáváme následující tvrzení o typu stability kritického bodu rovnice (7.2).

Věta 7.11 (Kriterium asymptotické stability) *Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je HKB rovnice (7.2). Jestliže vlastní čísla Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ mají záporné reálné části, pak je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ asymptoticky stabilní.*

Věta 7.12 (Kriterium nestability) *Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je HKB rovnice (7.2). Jestliže aspoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ má kladnou reálnou část, je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ nestabilní.*

Příklad 7.13 Určíme kritické body systému

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - x_1^2(t) + 2, \\ x_2'(t) = 2x_2^2(t) - 2x_1(t)x_2(t). \end{cases} \quad (7.8)$$

U hyperbolických kritických bodů určíme typ jejich stability.

Nejprve tedy řešíme soustavu rovnic

$$x_2 - x_1^2 + 2 = 0, \quad 2x_2^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Dostáváme čtyři kritické body

$$\bar{\mathbf{x}} = (\sqrt{2}, 0), \quad \hat{\mathbf{x}} = (-\sqrt{2}, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (-1, -1), \quad \check{\mathbf{x}} = (2, 2).$$

Jacobiho matice systému (7.8) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ -2x_2 & 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = -2\sqrt{2}$. Proto bod $\bar{\mathbf{x}} = (\sqrt{2}, 0)$ je HKB a podle věty 7.11 je asymptoticky stabilní.

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(-\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 2\sqrt{2}$. Proto bod $\hat{\mathbf{x}} = (-\sqrt{2}, 0)$ je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní.

- Jacobiho matice v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Proto bod $\tilde{\mathbf{x}} = (-1, -1)$ je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní.

- Jacobiho matice v bodě $\check{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\check{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(2, 2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$. Proto bod $\check{\mathbf{x}} = (2, 2)$ je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní.

Příklad 7.14 • V příkladu 7.4 jsme našli HKB $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ a ten je podle věty 7.12 nestabilní. Dále jsme našli NKB $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0)$. O stabilitě tohoto bodu neumíme zatím rozhodnout. Vyšetřování nehyperbolických kritických bodů je náročnější a vyžaduje hlubší znalost teorie dynamických systémů, která přesahuje rámec tohoto textu.

- V příkladu 7.5 jsme našli HKB $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ a HKB $\hat{\mathbf{x}} = (-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2})$. Oba body jsou podle věty 7.12 nestabilní.

Nyní se naučíme určovat lokální fázové portréty nelineární rovnice (7.2) v okolí jejích hyperbolických kritických bodů. Nechť $\bar{\mathbf{x}} \in G$ je HKB rovnice (7.2). Pak Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ je hyperbolická a podle věty 6.15 má lineární variační rovnice (7.6) v bodě $\bar{\mathbf{x}}$ jediný kritický bod a tím je HKB $(0, 0)$. Tento bod je

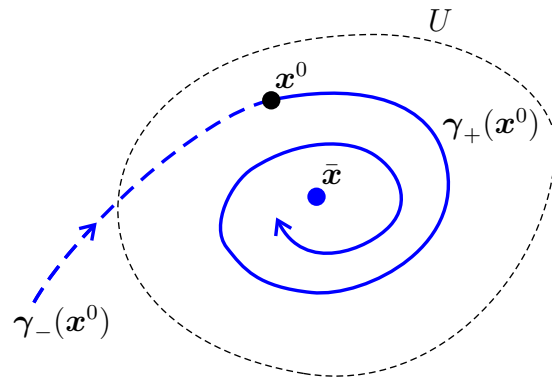
- zřídlo, má-li matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ vlastnosti popsané v poznámce 6.17, tj. rovnice (7.6) patří do topologické třídy I — zřídlo,
- výlevka, má-li matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ vlastnosti popsané v poznámce 6.18, tj. rovnice (7.6) patří do topologické třídy II — výlevka,
- sedlo, má-li matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ vlastnosti popsané v poznámce 6.19, tj. rovnice (7.6) patří do topologické třídy III — sedlo.

Tyto pojmy nyní rozšíříme z lineární rovnice (7.6) na nelineární rovnici (7.2) pomocí definic 7.15 a 7.16.

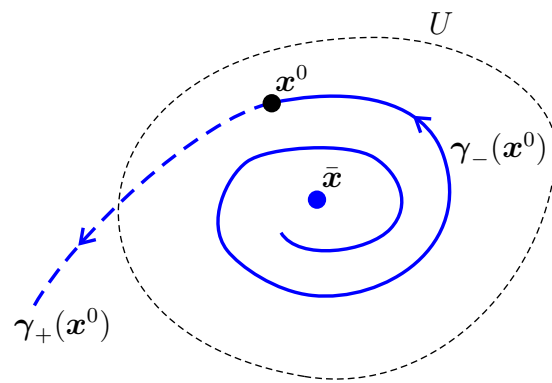
Definice 7.15 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ rovnice (7.2) se nazývá *výlevka (zřídlo)*, pokud existuje okolí U bodu $\bar{\mathbf{x}}$ takové, že pro každý bod $\mathbf{x}^0 \in U$ celá kladná část (záporná část) orbity řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ zůstává v U a navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}} \quad \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}} \right)$$

(viz obrázky 112 a 113).



Obrázek 112: Výlevka rovnice (7.2).

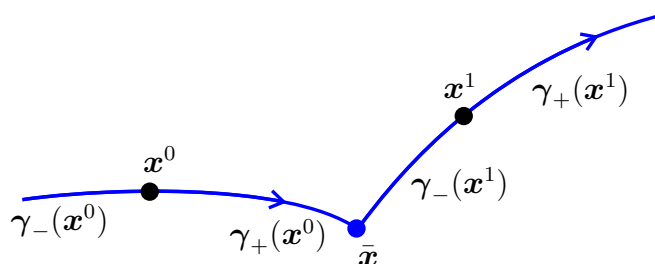


Obrázek 113: Zřídlo rovnice (7.2).

Definice 7.16 Kritický bod \bar{x} rovnice (7.2) se nazývá *sedlo*, pokud existují body $x^0 \neq \bar{x}$ a $x^1 \neq \bar{x}$ takové, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x^0) = \bar{x} \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x^1) = \bar{x}$$

(viz obrázek 114).



Obrázek 114: Sedlo rovnice (7.2).

Je-li \bar{x} HKB nelineární rovnice (7.2), můžeme rozhodnout, zda se jedná o výlevku, zřídlo nebo sedlo pomocí následující věty, která je důsledkem vět 7.9 a 7.10.

Věta 7.17 *Nechť $\bar{x} \in G$ je HKB nelineární rovnice (7.2). Potom \bar{x} je*

- zřídlo,
- výlevka,
- sedlo,

právě když kritický bod $(0, 0)$ lineární variační rovnice (7.6) v bodě \bar{x} je

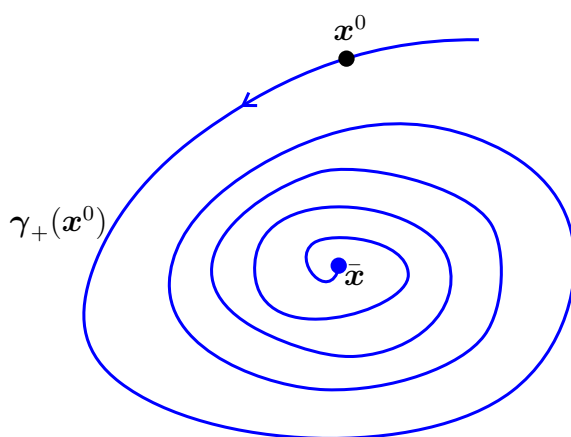
- zřídlo,
- výlevka,
- sedlo.

Patří-li lineární variační rovnice (7.6) do topologické třídy I — zřídlo nebo třídy II — výlevka, rozlišujeme v klasifikaci fázových portrétů, zda se jedná o uzel nebo ohnisko. Také tyto dva pojmy nyní rozšíříme na nelineární rovnici (7.2).

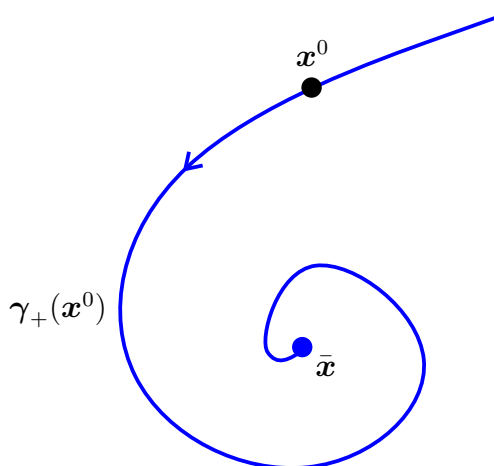
Definice 7.18 Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ rovnice (7.2), který je výlevkou nebo zřídlem se nazývá *ohnisko*, jestliže existuje okolí U bodu $\bar{\mathbf{x}}$ takové, že pro každý bod $\mathbf{x}^0 \in U$ oběhne buď kladná část nebo záporná část orbity řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ nekonečněkrát bod $\bar{\mathbf{x}}$. To znamená, že při transformaci do polárních souřadnic $r(t)$ a $\theta(t)$ (viz (5.15)) platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta(t)| = \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\theta(t)| = \infty.$$

Oběhnou-li orbity kolem $\bar{\mathbf{x}}$ pouze konečněkrát, nazývá se $\bar{\mathbf{x}}$ uzem.



Obrázek 115: Ohnisko rovnice (7.2), orbita má nekonečný počet oběhů.



Obrázek 116: Uzel rovnice (7.2), orbita má konečný počet oběhů.

Je-li $\bar{\mathbf{x}}$ HKB nelineární rovnice (7.2) a přidáme-li silnější požadavek na hladkost funkce \mathbf{f} , můžeme rozhodnout o typu kritického bodu $\bar{\mathbf{x}}$ pomocí následující věty.

Věta 7.19 (Metoda linearizace) *Nechť $f \in C^2(G)$ a necht' $\bar{x} \in G$ je HKB nelineární rovnice (7.2).*

Potom \bar{x} je

- *uzel-zřídlo,*
- *ohnisko-zřídlo,*
- *uzel-výlevka,*
- *ohnisko-výlevka,*
- *sedlo,*

právě když kritický bod $(0,0)$ lineární variační rovnice (7.6) v bodě \bar{x} je

- *uzel-zřídlo,*
- *ohnisko-zřídlo,*
- *uzel-výlevka,*
- *ohnisko-výlevka,*
- *sedlo.*

Věta 7.19 je důsledkem vět z monografie [6], Theorem 3, str. 140 a Theorem 4, str. 142.

Větu 7.19 užíváme k určení přibližných lokálních fázových portrétů rovnice (7.2) v okolí jejích hyperbolických kritických bodů. Čím menší okolí U uvažovaného kritického bodu \bar{x} zvolíme, tím více se fázový portrét rovnice (7.2) v U podobá fázovému portréту odpovídající lineární variační rovnice (7.6) v bodě \bar{x} .

Věta 7.19 vyjadřuje tzv. *metodu linearizace*, spočívající v lokálním nahrazení nelineární rovnice (7.2) lineární variační rovnicí (7.6).

Základní myšlenka této metody je založena na Taylorově vzorci pro funkci f v okolí HKB \bar{x} .

Je-li $f \in C^2(G)$ a $\bar{x} \in G$, pak pro každé $x \in G$ platí

$$f(x) - f(\bar{x}) = Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \omega(x - \bar{x}),$$

přičemž funkce ω splňuje

$$\omega(o) = o, \quad D\omega(o) = O.$$

Zvolíme-li tedy malé okolí $U \subset G$ bodu \bar{x} , platí

$$f(x) \doteq Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad \text{pro každé } x \in U,$$

protože

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \doteq \mathbf{o} \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \in U.$$

(Symbol \doteq vyjadřuje, že hodnoty na obou stranách se od sebe velmi málo liší.)
Tedy nelineární rovnici

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

lze v U aproximovat lineární variační rovnicí

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}.$$

Příklad 7.20 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1^2(t) - x_2^2(t) - 1, \\ x_2'(t) = 2x_2(t). \end{cases} \quad (7.9)$$

Ze soustavy rovnic

$$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0, \quad 2x_2 = 0$$

najdeme dva kritické body $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 0)$.

Jacobiho matice systému (7.9) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 2$. Proto kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)$ rovnice (7.9) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ je v kanonickém tvaru, a tedy podle věty 5.1 má lineární variační rovnice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

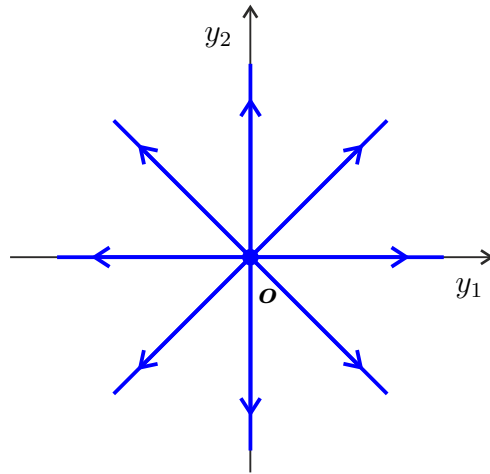
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.10)$$

fázový portrét uzal-zřídlo, který je na obrázku 117.

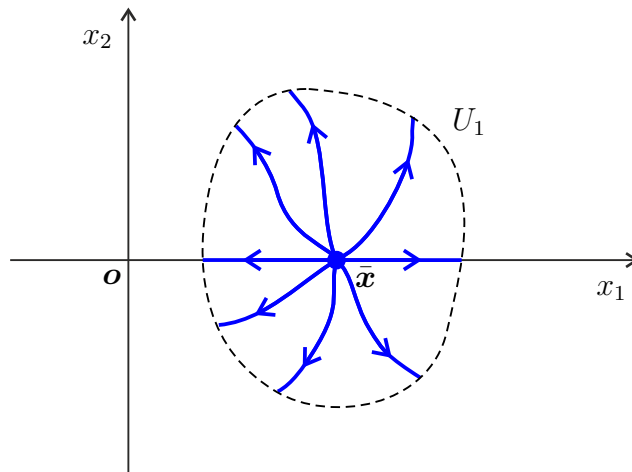
Podle věty 7.19 je kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ rovnice (7.9) rovněž uzal-zřídlo a tvar fázového portréту nelineární rovnice (7.9) v dostatečně malém okolí U_1 bodu $\bar{\mathbf{x}}$ je na obrázku 118.

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 0)$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Obrázek 117: Fázový portrét rovnice (7.10).

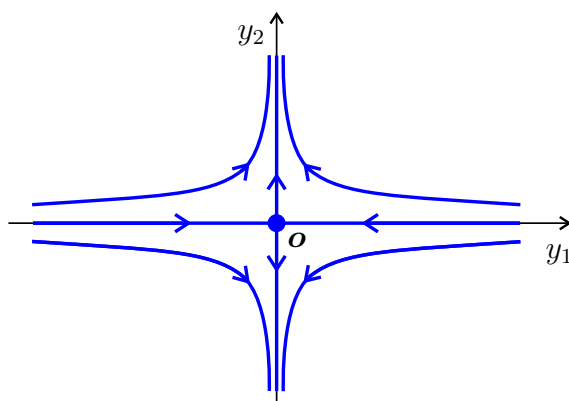


Obrázek 118: Lokální fázový portrét rovnice (7.9).

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Proto kritický bod $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 0)$ rovnice (7.9) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ je v kanonickém tvaru, a tedy podle věty 5.3 má lineární variační rovnice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

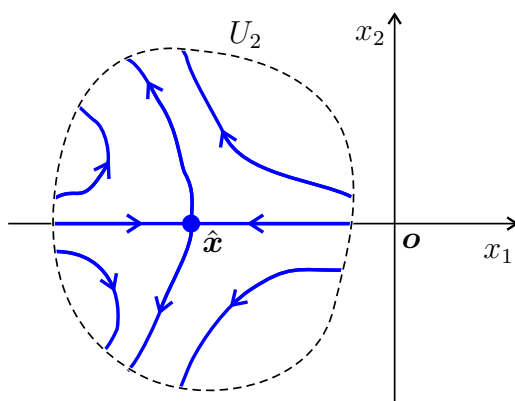
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.11)$$

fázový portrét sedlo, jehož tvar je na obrázku 119.



Obrázek 119: Fázový portrét rovnice (7.11).

Podle věty 7.19 je kritický bod $\hat{\mathbf{x}}$ rovnice (7.9) rovněž sedlo a tvar fázového portréту nelineární rovnice (7.9) v dostatečně malém okolí U_2 bodu $\hat{\mathbf{x}}$ je na obrázku 120.



Obrázek 120: Lokální fázový portrét rovnice (7.9).

Poznámka 7.21 Části přímek fázového portréту lineární variační rovnice (viz například obrázky 117, 119) přecházejí ve fázových portrétech nelineární rovnice (viz například obrázky 118, 120) na křivky. Jejich zakřivení lze určovat analyticky metodou řad, nebo numericky na počítači.

Příklad 7.22 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) + x_1^2(t). \end{cases} \quad (7.12)$$

Ze soustavy rovnic

$$x_2 = 0, \quad -2x_1 - 2x_2 + x_1^2 = 0$$

najdeme dva kritické body $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$, $\hat{\mathbf{x}} = (2, 0)$.

Jacobiho matice systému (7.12) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 + 2x_1 & -2 \end{pmatrix}.$$

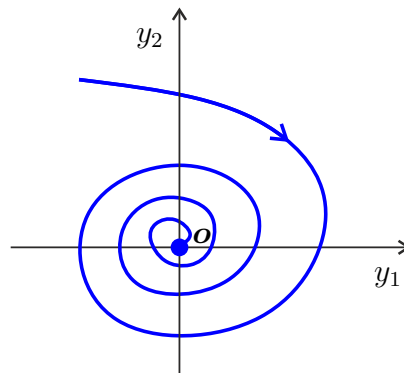
- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Proto kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ rovnice (7.12) je HKB a podle věty 7.11 je asymptoticky stabilní. Matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ není v kanonickém tvaru a podle klasifikace fázových portrétů je typu II_d. Lineární variační rovnice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

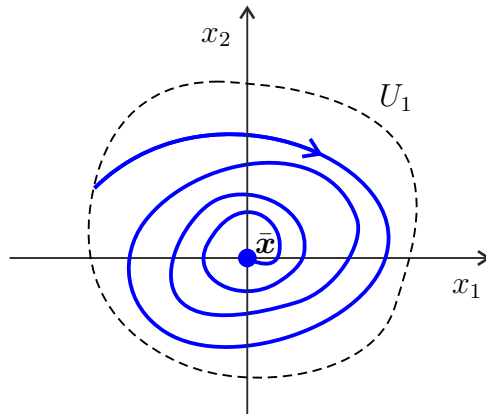
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.13)$$

má tedy fázový portrét ohnisko–výlevka. Podle poznámky 6.12 rotují orbity po směru h.r. Přesnější tvar spirály lze určit pomocí metody izoklin, viz poznámku 6.20. Fázový portrét lineární variační rovnice (7.13) je na obrázku 121.



Obrázek 121: Fázový portrét rovnice (7.13).

Podle věty 7.19 je kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ rovnice (7.12) rovněž ohnisko–výlevka a tvar fázového portrétnu nelineární rovnice (7.12) v dostatečně malém okolí U_1 bodu $\bar{\mathbf{x}}$ je na obrázku 122.



Obrázek 122: Lokální fázový portrét rovnice (7.12).

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Proto kritický bod $\hat{\mathbf{x}} = (2, 0)$ rovnice (7.12) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ není v kanonickém tvaru a podle klasifikace fázových portrétů je z třídy III. Lineární variační rovnice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.14)$$

má tedy fázový portrét sedlo. Podle věty 6.4 tento portrét obsahuje dvě vlastní přímky procházející počátkem. Přímky mají směr vlastních vektorů \mathbf{p} a \mathbf{r} , které přísluší k vlastním číslům $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}$ a $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}$.

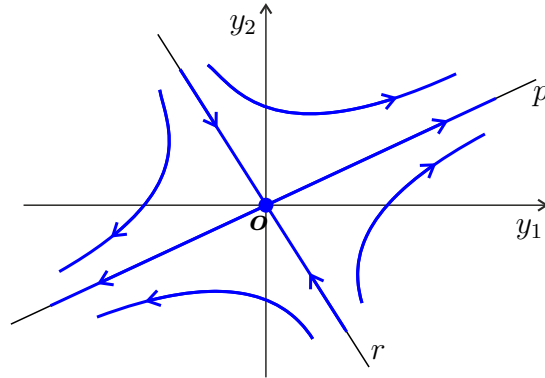
Vlastní vektory $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ a $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ určíme ze soustav (4.13) a (4.14), které zde mají tvar

$$\begin{cases} 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = (-1 + \sqrt{3})p_1, \\ 2 \cdot p_1 - 2 \cdot p_2 = (-1 + \sqrt{3})p_2, \end{cases}$$

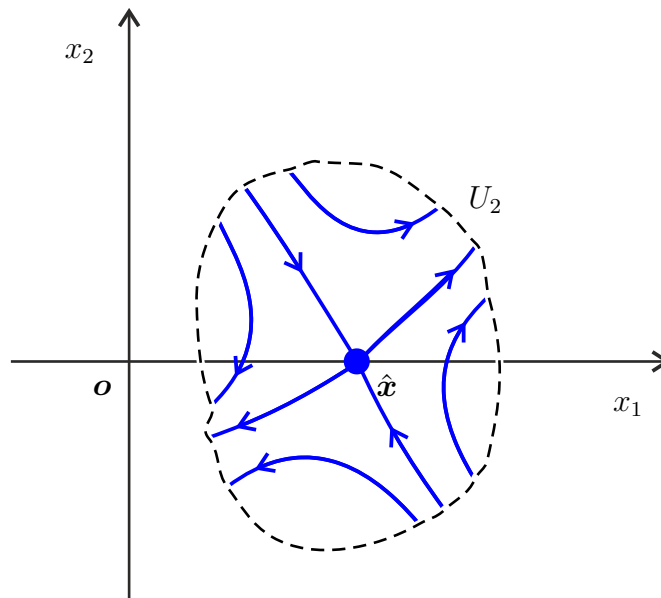
a

$$\begin{cases} 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 = (-1 - \sqrt{3})r_1, \\ 2 \cdot r_1 - 2 \cdot r_2 = (-1 - \sqrt{3})r_2. \end{cases}$$

Z první soustavy dostáváme vlastní vektor $\mathbf{p} = (1, -1 + \sqrt{3})$, který přísluší λ_1 a z druhé soustavy vlastní vektor $\mathbf{r} = (1, -1 - \sqrt{3})$, který přísluší λ_2 . Fázový portrét lineární variační rovnice (7.14) je na obrázku 123.



Obrázek 123: Fázový portrét rovnice (7.14).



Obrázek 124: Lokální fázový portrét rovnice (7.12).

Podle věty 7.19 je kritický bod $\hat{\mathbf{x}} = (2, 0)$ rovnice (7.12) rovněž sedlo a tvar fázového portréту nelineární rovnice (7.12) v dostatečně malém okolí U_2 bodu $\hat{\mathbf{x}}$ je na obrázku 124. Viz také poznámku 7.21.

Příklad 7.23 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1^3(t) + x_1(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)x_2(t) - x_1^3(t). \end{cases} \quad (7.15)$$

Ze soustavy rovnic

$$-x_1^3 + x_1x_2 = 0, \quad -x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3 = 0$$

najdeme čtyři kritické body

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, 0), \quad \hat{\mathbf{x}} = (0, 1), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (1, 1), \quad \check{\mathbf{x}} = (-1, 1).$$

Jacobiho matice systému (7.15) má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ x_2 - 3x_1^2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Proto kritický bod $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ rovnice (7.15) je NKB a neznáme zatím nástroje pomocí nichž bychom mohli rozhodnout o jeho stabilitě nebo určit lokální fázový portrét rovnice (7.15) v okolí tohoto bodu.

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

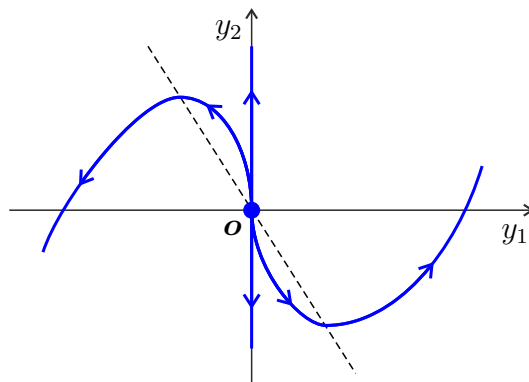
má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 1$. Proto kritický bod $\hat{\mathbf{x}} = (0, 1)$ rovnice (7.15) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ není podle (iii) na straně 62 v kanonickém tvaru a podle klasifikace fázových portrétů je z typu Ib. Lineární variační rovnice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.16)$$

má tedy fázový portrét uzal-zřídlo s jednou vlastní přímkou. Přímka prochází počátkem a má směr vlastního vektoru \mathbf{p} , který přísluší vlastnímu číslu 1. Vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ určíme ze soustavy

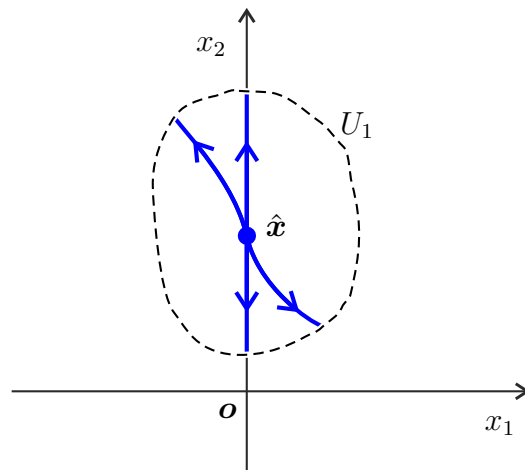
$$\begin{cases} 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 = p_1, \\ 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = p_2. \end{cases}$$

Dostáváme $\mathbf{p} = (0, 1)$. Vlastní přímka je osa y_2 . Přesnější tvar křivek lze určit pomocí metody izoklin, viz poznámku 6.20. Fázový portrét lineární variační rovnice (7.16) je na obrázku 125.



Obrázek 125: Fázový portrét rovnice (7.16).

Podle věty 7.19 je kritický bod $\hat{\mathbf{x}} = (0, 1)$ rovněž uzal-zřídlo a tvar fázového portréту nelineární rovnice (7.15) v dostatečně malém okolí U_1 bodu $\hat{\mathbf{x}}$ je na obrázku 126.



Obrázek 126: Lokální fázový portrét rovnice (7.15).

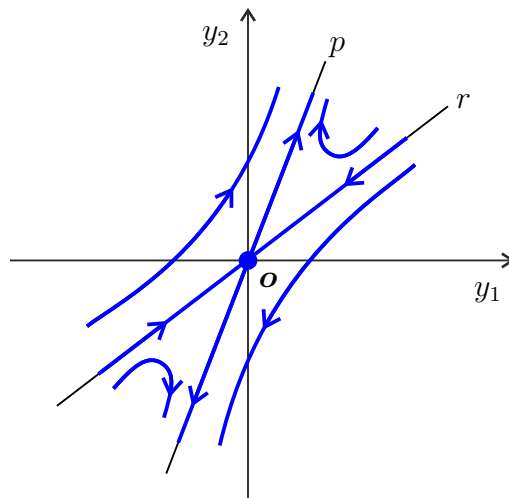
- Jacobiho matice v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$

$$D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Proto kritický bod $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1)$ rovnice (7.15) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ není v kanonickém tvaru a podle klasifikace fázových portrétů je z třídy III. Lineární variační rovnice v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.17)$$

má tedy fázový portrét sedlo. Podle věty 6.4 obsahuje portrét dvě vlastní přímky procházející počátkem. Jedna vlastní přímka má směr vlastního vektoru $\mathbf{p} = (1, 2 + \sqrt{2})$, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_1 = \sqrt{2}$ (šipky na přímce směřují od počátku) a druhá vlastní přímka má směr vlastního vektoru $\mathbf{r} = (1, 2 - \sqrt{2})$, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (šipky na přímce směřují k počátku). Fázový portrét lineární variační rovnice (7.17) je na obrázku 127.



Obrázek 127: Fázový portrét rovnice (7.17).

- Jacobiho matice v bodě $\check{\mathbf{x}}$

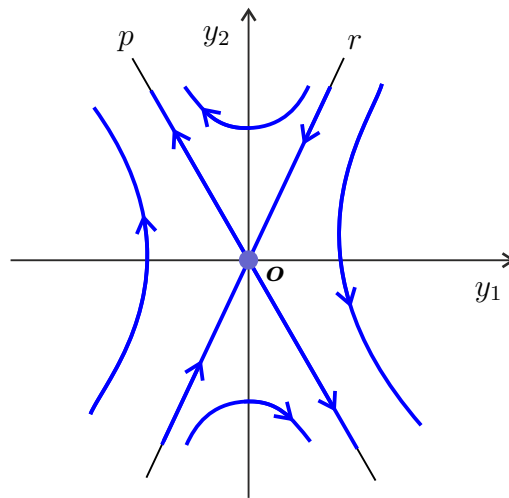
$$D\mathbf{f}(\check{\mathbf{x}}) = D\mathbf{f}(-1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Proto kritický bod $\check{\mathbf{x}} = (-1, 1)$ rovnice (7.15) je HKB a podle věty 7.12 je nestabilní. Matice $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\check{\mathbf{x}})$ není v

kanonickém tvaru a podle klasifikace fázových portrétů je z třídy III. Tedy lineární variační rovnice v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.18)$$

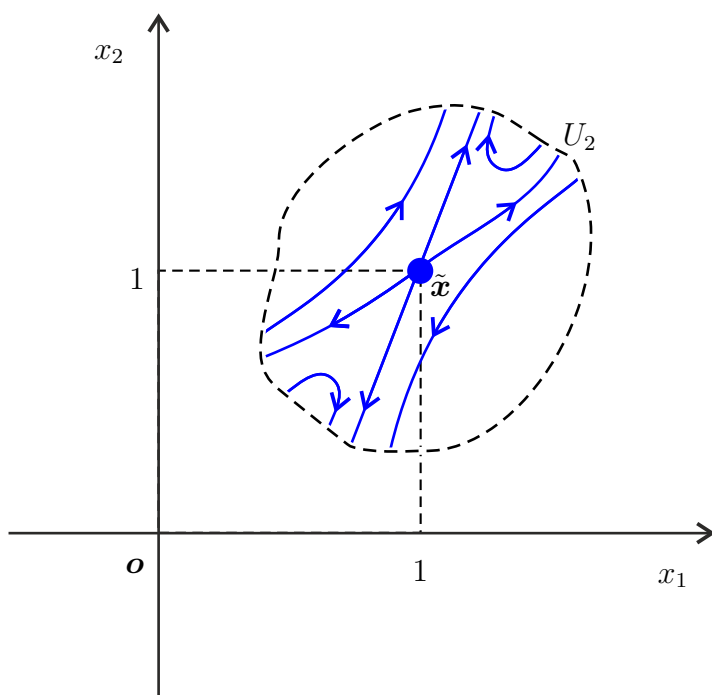
má fázový portrét sedlo. Dvě vlastní přímky p, r procházejí počátkem. Vlastní přímka p má směr vlastního vektoru $\mathbf{p} = (1, -1 - \sqrt{3})$, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}$. Vlastní přímka r má směr vlastního vektoru $\mathbf{r} = (1 + \sqrt{3}, 2)$, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}$. Fázový portrét lineární variační rovnice (7.18) je na obrázku 128.



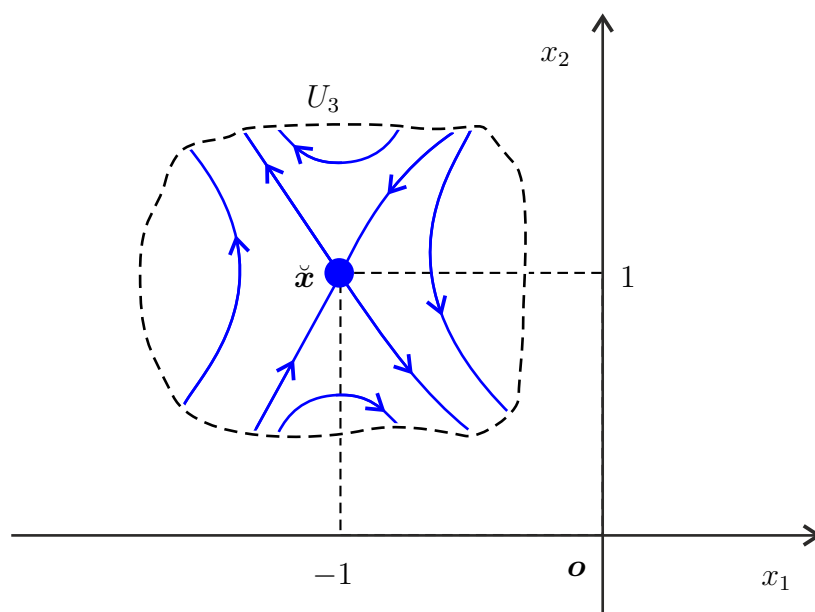
Obrázek 128: Fázový portrét rovnice (7.18).

Podle věty 7.19 jsou kritické body $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1)$ a $\check{\mathbf{x}} = (-1, 1)$ rovněž sedla a tvary fázových portrétů nelineární rovnice (7.15) v dostatečně malých okolích U_2 bodu $\tilde{\mathbf{x}}$ a U_3 bodu $\check{\mathbf{x}}$ jsou na obrázcích 129 a 130. Viz také poznámku 7.21.

V některých případech můžeme propojením lokálních fázových portrétů získat globální fázový portrét (na celé rovině \mathbb{R}^2) nelineární rovnice (7.2). Připomeňme, že u lineární rovnice (6.1) je fázový portrét vždy globální. Propojení lokálních fázových portrétů je založeno na větě o lokálním toku v okolí regulárních bodů rovnice (7.2) (viz definici 1.18).



Obrázek 129: Lokální fázový portrét rovnice (7.15).



Obrázek 130: Lokální fázový portrét rovnice (7.15).

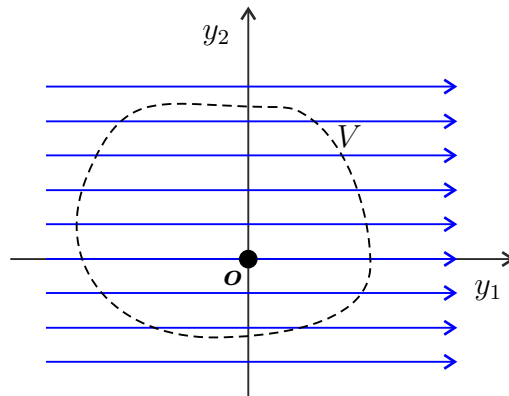
Věta 7.24 (O lokálním toku) *Nechť $\mathbf{x}^0 \in G$ je regulární bod rovnice (7.2). Pak existuje okolí $U \subset G$ bodu \mathbf{x}^0 a okolí $V \subset \mathbb{R}^2$ bodu $(0,0)$ tak, že rovnice (7.2) je na U topologicky ekvivalentní se systémem*

$$\begin{cases} y_1'(t) = 1, \\ y_2'(t) = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

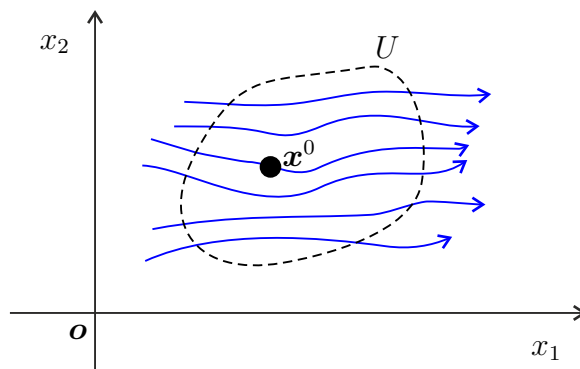
na V .

V důkaze této věty se přímo konstruuje požadovaný homeomorfismus $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ a lze ho najít například v monografii [2], str. 186–187.

System (7.19) nemá žádný kritický bod, tj. všechny jeho body jsou regulární. Jeho fázový portrét se skládá ze samých rovnoběžek a je na obrázku 131. Homeomorfismus \mathbf{h} převádí tyto rovnoběžky na orbity rovnice (7.2), které procházejí okolím U tak, že všechny jednou stranou vstupují do okolí U a druhou stranou z něj vystupují, podobně jako na obrázku 132.



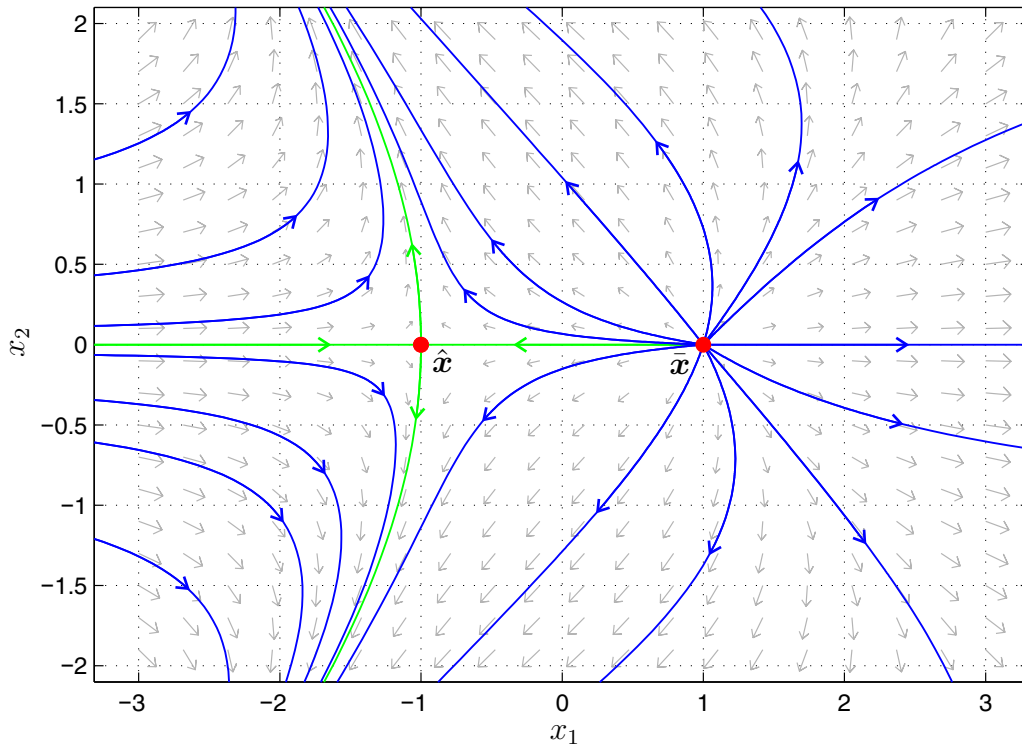
Obrázek 131: Fázový portrét rovnice (7.19).



Obrázek 132: Lokální fázový portrét rovnice (7.2).

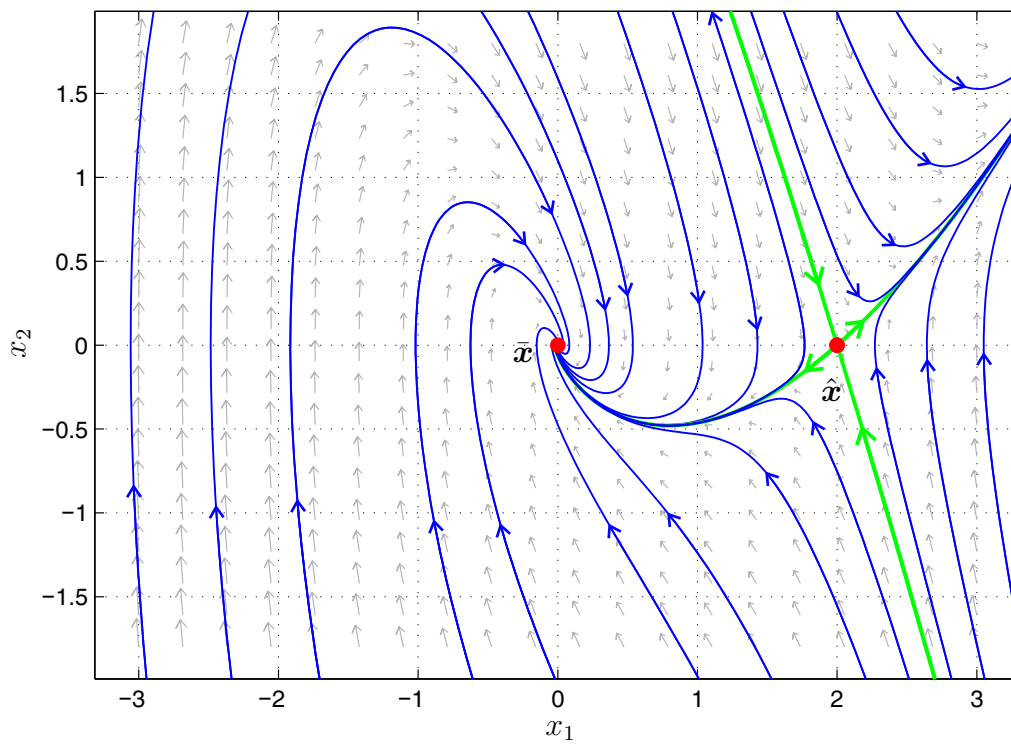
Příklad 7.25 • (Pokračování příkladu 7.20) Rovnice (7.9) má právě dva kritické body $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)$ a $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 0)$. Lokální fázové portréty rovnice (7.9) v okolí těchto bodů jsou na obrázcích 118 a 120.

Ostatní body fázové roviny jsou regulární. Protože se zde nevyskytují žádné speciální orbity (například periodické nebo homoklinické, viz poznámku 8.5) můžeme oba lokální fázové portréty propojit pomocí věty 7.24 a dostaneme globální fázový portrét rovnice (7.9) na obrázku 133. Dodejme, že vyšetřování existence periodických nebo homoklinických orbit přesahuje rozsah tohoto textu.



Obrázek 133: Globální fázový portrét rovnice (7.9).

• (Pokračování příkladu 7.22) Rovnice (7.12) má právě dva kritické body $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ a $\hat{\mathbf{x}} = (2, 0)$. Lokální fázové portréty rovnice (7.12) v okolí těchto bodů jsou na obrázcích 122 a 124. Ostatní body jsou regulární. Podobně jako v předchozím případě můžeme propojit lokální fázové portréty rovnice 7.12, které jsou na obrázcích 122 a 124 a získáme tak globální fázový portrét rovnice (7.12) na obrázku 134.



Obrázek 134: Globální fázový portrét rovnice (7.12).

8 Planární Hamiltonovy systémy



V této kapitole se seznámíme se zajímavým typem nelineárního systému, který vzniká jako model různých fyzikálních problémů.

Důležitým rysem tohoto systému je, že lze najít jeho globální fázový portrét vyšetřováním průběhu funkcí jedné a dvou reálných proměnných.

Definice 8.1 Necht' $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $H \in C^2(G)$. Potom systém tvaru

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (8.1)$$

se nazývá *Hamiltonův systém* a funkci $H(x_1, x_2)$ nazýváme *hamiltonián*.

Systém (8.1) je speciální případ systému (7.1), kde

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

Funkce $H(x_1, x_2)$ má ve fyzikálních modelech význam totální energie. Základní vlastnost systému (8.1) vyjadřuje následující věta.

Věta 8.2 (Konzervace energie) Necht' $\mathbf{x}^0 \in G$ a $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ je řešení počáteční úlohy (8.1), (4.4) na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} \subset \mathbb{R}$.

Pak platí

$$H(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) = H(\mathbf{x}^0) \quad \text{pro každé } t \in I_{\mathbf{x}^0}. \quad (8.2)$$

Důkaz. Uvažujme řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))^T$ úlohy (8.1), (4.4) a vytvořme složenou funkci

$$\tilde{H}(t) = H(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) = H(x_1(t), x_2(t)), \quad t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Derivováním a dosazením z (8.1) dostáváme

$$\frac{d\tilde{H}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)) x_2'(t) = 0 \quad \text{pro } t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Tedy složená funkce $\tilde{H}(t)$ je konstantní na $I_{\mathbf{x}^0}$, a proto funkce $H(x_1, x_2)$ je konstantní podél orbit řešení $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$. Přitom podle (4.4) je

$$\tilde{H}(0) = H(\varphi(0, \mathbf{x}^0)) = H(\mathbf{x}^0),$$

tedy platí (8.2). □

Věta 8.2 vyjadřuje fakt, že funkce $H(x_1, x_2)$ zůstává konstantní podél orbity libovolného řešení systému (8.1).

Říkáme, že systém (8.1) *konzervuje energii*.

Důsledek 8.3 *Hladiny hamiltoniánu $H(x_1, x_2)$ se skládají z orbit systému (8.1).*

Zvolme $c \in \mathbb{R}$. Připomeňme, že hladina \mathcal{H}_c funkce $H(x_1, x_2)$ je množina bodů $(x_1, x_2) \in G$ splňujících rovnici

$$H(x_1, x_2) = c.$$

Analytické nalezení hladin nemusí být jednoduché. Proto obvykle nejprve hledáme kritické body, vyšetřujeme okolí těchto bodů, hledáme hladiny obsahující tyto kritické body, užíváme metodu izoklin a metodu linearizace. Je-li $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$ kritický bod systému (8.1), potom podle (8.2) hladina obsahující tento kritický bod se skládá z bodů (x_1, x_2) splňujících rovnici

$$H(x_1, x_2) = H(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \quad (8.3)$$

Příklad 8.4 Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) - x_2^2(t), \\ x_2'(t) = -2x_1(t). \end{cases} \quad (8.4)$$

Položme $H(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^3$. Pak platí

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 - x_2^2,$$

proto (8.4) je Hamiltonův systém a funkce H je jeho hamiltonián. Globální fázový portrét systému (8.4) získáme z hladin funkce H . Nejprve určíme kritické body a hladiny procházející kritickými body.

Řešíme soustavu

$$2x_2 - x_2^2 = 0, \quad -2x_1 = 0$$

a dostáváme dva kritické body

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, 0), \quad \hat{\mathbf{x}} = (0, 2).$$

Dosazením do funkce H máme

$$H(\bar{\mathbf{x}}) = H(0, 0) = 0, \quad H(\hat{\mathbf{x}}) = H(0, 2) = \frac{4}{3}.$$

Podle (8.3) je hladina obsahující bod $\bar{\mathbf{x}}$ dána rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^3 = 0 \quad (8.5)$$

a hladina obsahující bod \hat{x} rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^3 = \frac{4}{3}. \quad (8.6)$$

Vyjádříme-li (8.5) ve tvaru

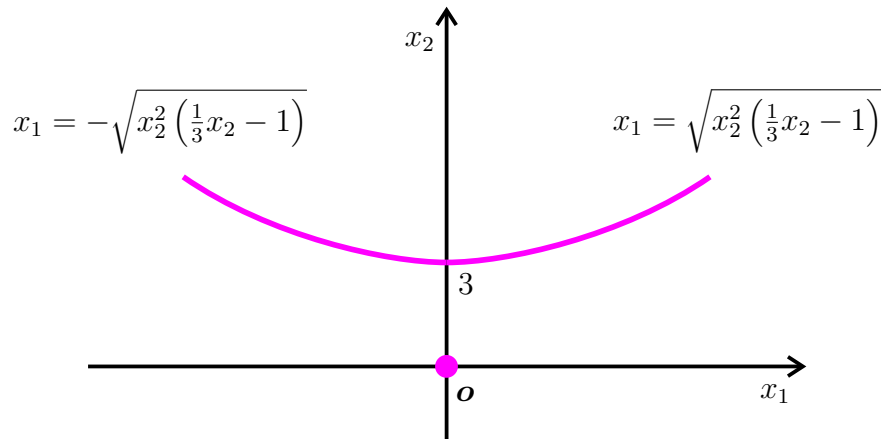
$$x_1^2 + \left(1 - \frac{1}{3}x_2\right)x_2^2 = 0,$$

vidíme, že rovnici vyhovuje kromě bodu $(0, 0)$ i bod $(0, 3)$, a pro $x_2 < 0$ nebo $x_2 \in (0, 3)$ nemá rovnice řešení.

Pro $x_2 \geq 3$ dostáváme

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 \left(\frac{1}{3}x_2 - 1\right)} \quad \text{a} \quad x_1 = -\sqrt{x_2^2 \left(\frac{1}{3}x_2 - 1\right)}. \quad (8.7)$$

Hladina \mathcal{H}_0 daná rovnicí (8.5) se skládá z grafů funkcí (8.7) a bodu $\bar{x} = (0, 0)$ a je na obrázku 135.



Obrázek 135: Hladina \mathcal{H}_0 systému (8.4).

Vyjádříme-li (8.6) ve tvaru

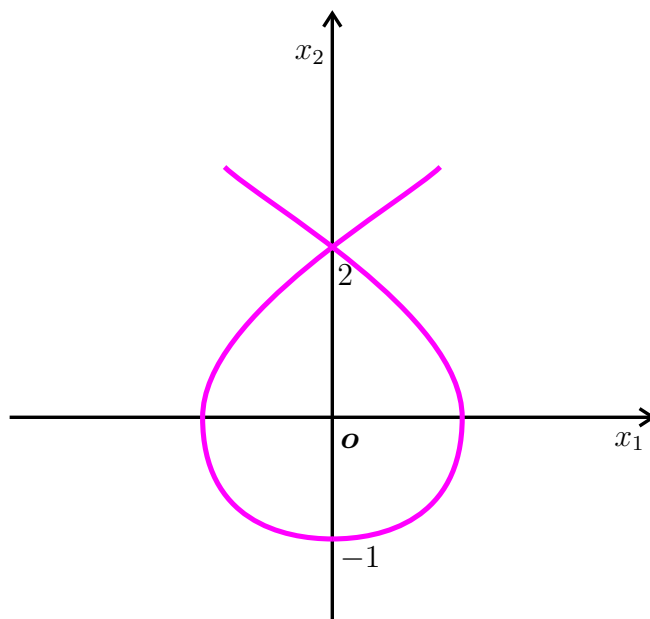
$$x_1^2 + \left(1 - \frac{1}{3}x_2\right)x_2^2 = \frac{4}{3},$$

vidíme, že kromě bodu $(0, 2)$ splňuje rovnici také bod $(0, -1)$ a pro bod $x_2 < -1$ nemá rovnice řešení. Pro $x_2 \geq -1$ dostáváme

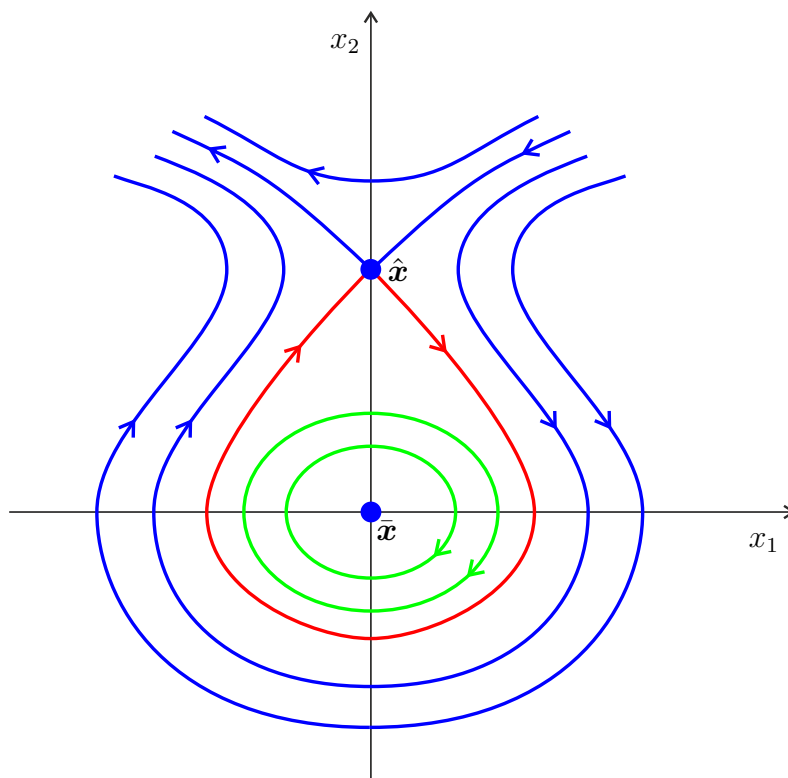
$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3} + x_2^2 \left(\frac{1}{3}x_2 - 1\right)} \quad \text{a} \quad x_1 = -\sqrt{\frac{4}{3} + x_2^2 \left(\frac{1}{3}x_2 - 1\right)}. \quad (8.8)$$

Hladina $\mathcal{H}_{\frac{4}{3}}$ daná rovnicí (8.6) se skládá z grafů funkcí (8.8) a je na obrázku 136.

K dalšímu upřesnění tvaru orbit lze také užít metodu izoklin (viz poznámku 6.20), pomocí níž rovněž určíme šipky na orbitách. Vyšetřením dalších hladin \mathcal{H}_c o rovnicích $x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^3 = c$, $c \in \mathbb{R}$, dostáváme fázový portrét systému (8.4) na obrázku 137.



Obrázek 136: Hladina $\mathcal{H}_{\frac{4}{3}}$ systému (8.4).



Obrázek 137: Globální fázový portrét rovnice (8.4).

Poznámka 8.5 V příkladu 8.4 se vyskytly dva důležité typy orbit.

- *Periodická orbita*, která má tvar uzavřené křivky a odpovídá periodickému řešení systému,
- *homoklinická orbita*, odpovídající řešení, které konverguje pro $t \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow -\infty$ k témuž kritickému bodu.

Periodické orbity na obrázku 137 jsou vyznačeny zeleně a obíhají kritický bod \bar{x} . Homoklinická orbita na obrázku 137 je vyznačena červeně.

V příkladu 8.8 uvidíme další důležitý typ orbity:

- *heteroklinická orbita*, odpovídající řešení, které konverguje pro $t \rightarrow \infty$ k jednomu kritickému bodu a pro $t \rightarrow -\infty$ k jinému kritickému bodu.

Definice 8.6 Kritický bod \bar{x} systému (8.1) nazveme *střed*, jestliže existuje okolí U bodu \bar{x} , které obsahuje pouze periodické orbity obíhající tento kritický bod.

Bod \bar{x} na obrázku 137 je střed systému (8.4). Jak již bylo uvedeno, při konstrukci fázového portréту Hamiltonova systému (8.1) kombinujeme určování hladin hamiltoniánu H s dalšími metodami. Jednou z nich je metoda linearizace (viz větu 7.19), k níž potřebujeme znát Jacobiho matici systému (8.1). Jelikož na pravé straně (8.1) vystupují parciální derivace hamiltoniánu H , v Jacobiho matici tohoto systému budou vystupovat parciální derivace druhého řádu. Označíme-li $\mathbf{M}(x_1, x_2)$ Jacobiho matici systému (8.1), pak

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Podle věty 7.19 lze rozhodnout o typu kritického bodu \bar{x} systému (7.1) pouze, pokud je tento bod hyperbolický. Jedná-li se však o speciální případ systému (7.1), kterým je Hamiltonův systém (8.1), platí navíc následující věta.

Věta 8.7 *Nechť $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$ je kritický bod systému (8.1).
Je-li $\det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) < 0$, je \bar{x} sedlo systému (8.1).
Je-li $\det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) > 0$, je \bar{x} střed systému (8.1).*

Důkaz lze najít například v monografii [6, str. 154–155].

Podle (8.9) je $\text{tr}(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = 0$ a dosadíme-li do vzorce (4.12) pro výpočet vlastních čísel, máme

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4 \det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2))}}{2}.$$

Je-li $\det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) < 0$, platí

$$\lambda_{1,2} = \pm |\det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2))|,$$

tj. jedno vlastní číslo je kladné a druhé záporné. Proto podle věty 8.7 je $\bar{\mathbf{x}}$ sedlo, což je v souladu s tvrzením věty 7.19.

Je-li $\det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) > 0$, platí

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \det(\mathbf{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)),$$

tj. vlastní čísla jsou ryze imaginární a $\bar{\mathbf{x}}$ je NKB. V takovém případě nedává věta 7.19 informaci o typu bodu $\bar{\mathbf{x}}$. Podle věty 8.7 však dostáváme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je střed.

Příklad 8.8 (Pokračování příkladu 8.4) Jacobiho matice systému (8.4) má tvar

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 - 2x_2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiho matice v bodě $\bar{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{M}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

má determinant roven 4, a proto podle věty 8.7 je bod $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ střed systému (8.4).

- Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{M}(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

má determinant roven -4 , a proto podle věty 8.7 je bod $\hat{\mathbf{x}} = (0, 2)$ sedlo systému (8.4). Tentýž výsledek dostaneme, pokud najdeme vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a užijeme větu 7.19 s lineární variační rovnicí v bodě $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Viz obrázek 137.

Speciálním případem Hamiltonova systému je tzv. *konzervativní systém*, který vzniká z diferenciální rovnice druhého řádu tvaru

$$x''(t) + f(x(t)) = 0.$$

Tuto rovnici lze substitucí $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$ převést na konzervativní systém, který má tvar

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -f(x_1(t)). \end{cases} \quad (8.10)$$

Systém (8.10) je Hamiltonův a jeho hamiltonián má tvar

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(u)du, \quad (8.11)$$

protože platí

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f(x_1), \quad \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_2.$$

Funkci $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(u)du$ nazýváme *potenciálová funkce* systému (8.10).

Z rovnice (8.11) plyne, že hladiny funkce H (a tedy i všechny orbity systému (8.10)) jsou symetrické podle osy x_1 . Z první rovnice v (8.10) dále plyne, že každý kritický bod systému (8.10) leží na ose x_1 , tj. má tvar $(\bar{x}_1, 0)$.

Jacobiho matice systému (8.10) vypadá následovně

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x_1) & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\det(\mathbf{M}(x_1, x_2)) = f'(x_1) = F''(x_1).$$

Z věty 8.7 proto pro systém (8.10) vyplývá

Věta 8.9 *Nechť $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, 0) \in G$ je kritický bod systému (8.10).*

Je-li $f'(\bar{x}_1) < 0$, je $\bar{\mathbf{x}}$ sedlo systému (8.10).

Je-li $f'(\bar{x}_1) > 0$, je $\bar{\mathbf{x}}$ střed systému (8.10).

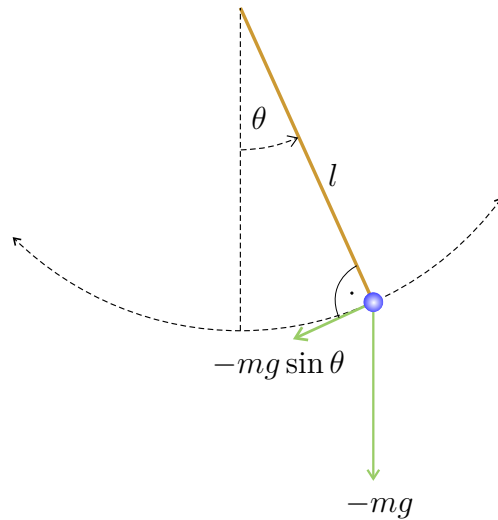
Příklad 8.10 (Rovinné kyvadlo bez buzení a tlumení) Kyvadlo, skládající se z nehmotné tyče o délce l , na jejímž volném konci je kulička o hmotnosti m , je na svém druhém konci upevněno a pohybuje se ve svislé rovině bez tření. Na kyvadlo působí gravitační síla mg .

Funkce $\theta(t)$ udává hodnotu úhlové odchylky kyvadla od svislé pozice kyvadla. Je-li kyvadlo vychýleno napravo od svislé pozice, je $\theta(t) > 0$, při výchylce nalevo je $\theta(t) < 0$. Funkce $l\theta(t)$ vyjadřuje dráhu kuličky v čase t , tj. délku oblouku, po kterém se kulička pohybovala od svislé pozice v čase t . Funkce $l\theta'(t)$ vyjadřuje úhlovou rychlost kuličky a funkce $\theta''(t)$ je úhlové zrychlení kuličky. Pohybová rovnice kyvadla je založena na Newtonově zákoně a má tvar

$$ml\theta''(t) = -mg \sin \theta(t).$$

Odsud pomocí substituce

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x_2(t) = \theta'(t)$$



Obrázek 138: Matematické kyvadlo.

dostáváme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -\frac{g}{l} \sin x_1(t). \end{cases} \quad (8.12)$$

Systém (8.12) je konzervativní systém s potenciálovou funkcí

$$F(x_1) = \frac{g}{l} \int_0^{x_1} \sin u \, du = \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$

a s hamiltoniánem

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1).$$

Systém (8.12) má posloupnost kritických bodů

$$(0, 0), (\pi, 0), (-\pi, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0), \dots, (k\pi, 0), (-k\pi, 0), \dots \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k periodičnosti funkce \sin stačí vyšetřit 2 kritické body $B_1 = (0, 0)$ a $B_2 = (\pi, 0)$. Platí

$$f(x_1) = \frac{g}{l} \sin x_1, \quad f'(x_1) = \frac{g}{l} \cos x_1.$$

Tedy

$$f'(0) = \frac{g}{l} > 0$$

a B_1 je střed systému (8.12),

$$f'(\pi) = -\frac{g}{l} < 0$$

a B_2 je sedlo systému (8.12).

Jacobiho matice systému (8.12) $\mathbf{M}(x_1, x_2)$ má tvar

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvar fázového portréту v okolí bodu B_2 lze určit pomocí vlastních vektorů Jacobiho matice v bodě B_2 .

Platí

$$\mathbf{M}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{M}(\pi, 0)$ jsou

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}},$$

a její Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{g}{l}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{g}{l}} \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory najdeme jako sloupce matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

z rovnice

$$\mathbf{M}(\pi, 0) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{g}{l}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{g}{l}} \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme

$$p_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} p_1, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}} r_1.$$

Zvolíme-li například $p_1 = r_1 = 1$, potom

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left(1, \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ a

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2) = \left(1, -\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Vyšetříme hladiny funkce H obsahující kritické body B_1 a B_2 . Protože

$$H(B_1) = H(0, 0) = 0,$$

tak bod B_1 je obsažen v hladině \mathcal{H}_0 , která je dána rovnicí

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = 0.$$

Tato hladina se skládá pouze z kritických bodů (středů)

$$(0, 0), (2k\pi, 0), (-2k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dále je

$$H(B_2) = H(\pi, 0) = \frac{2g}{l}.$$

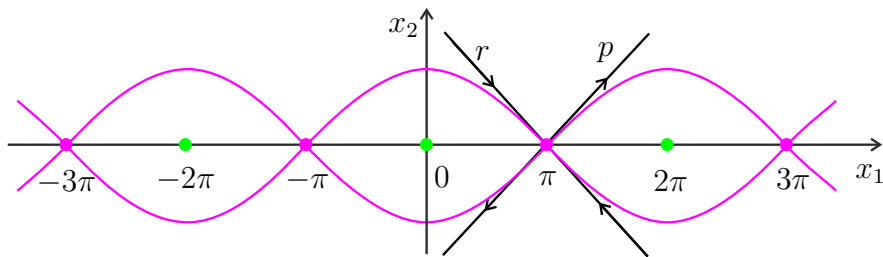
Tedy bod B_2 je obsažen v hladině $\mathcal{H}_{\frac{2g}{l}}$, která je dána rovnicí

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{2g}{l}.$$

Odtud

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos x_1)}.$$

Vzhledem k periodičnosti funkce kosinus stačí uvažovat $x_1 \in [-\pi, \pi]$.



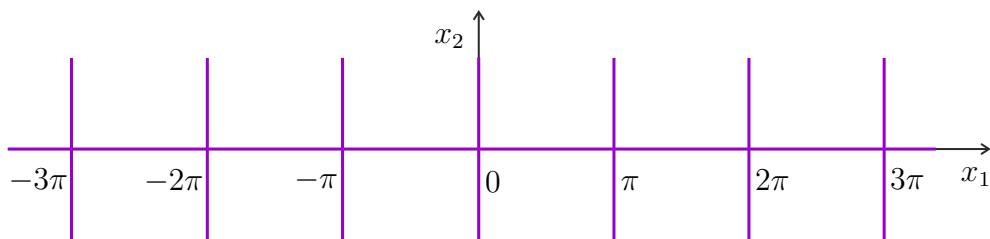
Obrázek 139: Část hladiny \mathcal{H}_0 a hladiny $\mathcal{H}_{\frac{2g}{l}}$.

Hladina $\mathcal{H}_{\frac{2g}{l}}$ se skládá z kritických bodů (sedel)

$$((2k - 1)\pi, 0), (-(2k - 1)\pi, 0), \quad k \in \mathbb{N},$$

a z heteroklinických orbit spojujících tyto body.

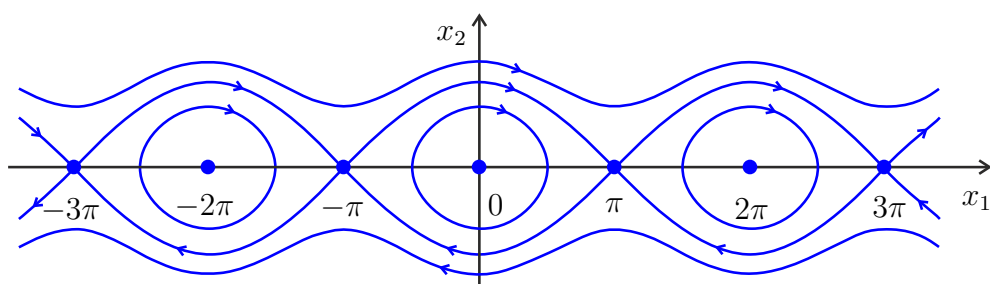
Vlastní přímky procházející těmito body a mající směr vlastních vektorů \mathbf{p} a \mathbf{r} jsou tečny k heteroklinickým orbitám.



Obrázek 140: Izokliny systému (8.12).

Rozborem dalších hladin \mathcal{H}_c , $c \in \mathbb{R}$, odvodíme tvar zbývajících orbit. Lze užít i metodu izoklin. Izokliny systému (8.12) jsou osy x_1 , x_2 a všechny přímky $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (viz obrázek 140).

Fázový portrét systému (8.12) je načrtnut na obrázku 141. Směr šipek na orbitách je jako u každého konzervativního systému, doprava pro $x_2 > 0$ a doleva pro $x_2 < 0$.



Obrázek 141: Fázový portrét systému (8.12).

Literatura

- [1] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York 1983.
- [2] J. Hale, H. Koçak: *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York 1991.
- [3] J. H. Hubbard, B. H. West: *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Part I: Ordinary Differential Equations*, Springer, New York 1991.
- [4] J. H. Hubbard, B. H. West: *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher-Dimensional Systems*, Springer, New York 1995.
- [5] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno 1995.
- [6] L. Perko: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York 1991.
- [7] F. Verhulst: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin 1990.
- [8] S. Wiggins: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York 2003.